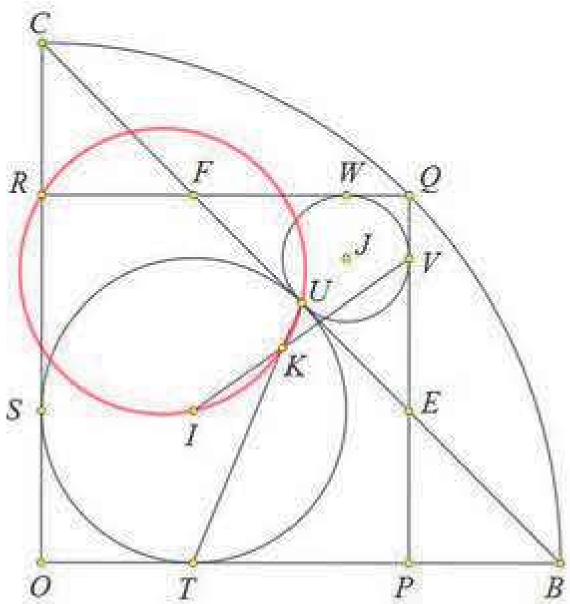
Problema 929. (Suppa, E., 2019) En la siguiente figura, $OPQR$ es un cuadrado y los puntos I y J son los incentros de los triángulos OBC y EQF, respectivamente:



Probar que los puntos R, I, K y U son concíclicos.

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el lado del cuadrado $OPQR$ tiene longitud unidad, por lo que:

$$OB = OC = OQ = \sqrt{2} \Rightarrow BC = 2$$

y, como el triángulo EPB es rectángulo es isósceles, entonces:

$$RF = PE = PB = \sqrt{2} - 1$$

① Vamos a probar que el triángulo RIV es rectángulo en I, comprobando que verifica el Teorema de Pitagoras:

❶ Como el radio de la circunferencia (I) es:

$$i = \frac{OB + OC - BC}{2} = \sqrt{2} - 1 = EP$$

entonces, $RS = OC - i = 2 - \sqrt{2}$, por lo que:

$$RI^2 = RS^2 + i^2 = 9 - 6\sqrt{2}$$

❷ Como $QF = QE = QP - PE = 2 - \sqrt{2}$, entonces, $FE = \sqrt{2}\, QE = 2\sqrt{2} - 2$, por lo que el radio de la circunferencia (J) es:

$$j = \frac{QE + QF - FE}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

y, por tanto:

$$RV^2 = RQ^2 + j^2 = 18 - 12\sqrt{2}$$

❸ Como $IE = RS = 2 - \sqrt{2}$ y:

$$EV = EQ - j = RS - j = \sqrt{2} - 1$$

entonces:

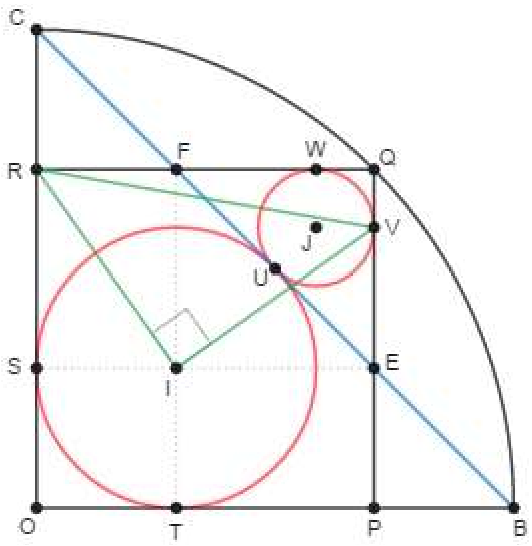
$$IV^2 = IE^2 + EV^2 = 9 - 6\sqrt{2}$$

❹ Como:

$$RI^2 + IV^2 - RV^2 = 0$$

entonces, el triángulo RIV es rectángulo en I, lo cual significa que:

$$\triangle KIR = \frac{\pi}{2}$$



② Vamos a probar que el triángulo TUR es rectángulo en U, comprobando que verifica el Teorema de Pitagoras:

❶ Como $QU = (1 + \sqrt{2})j = \sqrt{2} - 1$, si el punto K es la proyección ortogonal del punto U sobre la recta QR, como:

$$QK = UK = \frac{QU}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

entonces, $RK = QR - QK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que:

$$RU^2 = UK^2 + RK^2 = 2 - \sqrt{2}$$

❷ $RT^2 = OR^2 + i^2 = 4 - 2\sqrt{2}$

❸ Si el punto N es la proyección ortogonal del punto U sobre la recta OB, como el triángulo UNB es rectángulo e isósceles, entonces:

$$BN \underset{*}{=} UN = KN - UK = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo que $TN = OB - i - BN = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ y, por tanto:

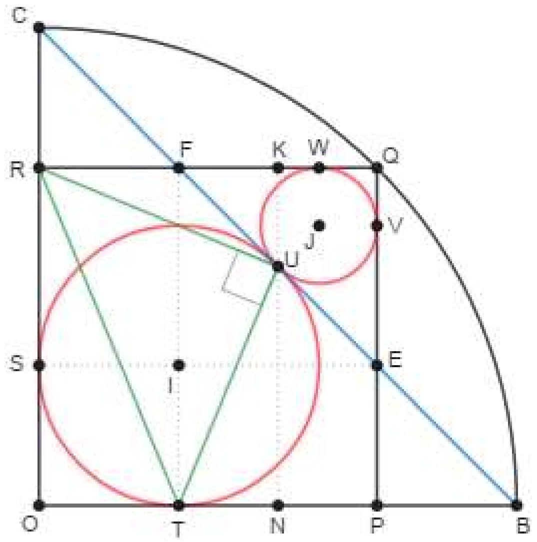
$$UT^2 = UN^2 + TN^2 = 2 - \sqrt{2}$$

❹ Como:

$$RU^2 + UT^2 - RT^2 = 0$$

entonces, el triángulo TUR es rectángulo en U, lo cual significa que:

$$\measuredangle RUK = \frac{\pi}{2}$$



Finalmente, como:

$$\measuredangle KIR + \measuredangle RUK = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

entonces:

$$\measuredangle IRU + \measuredangle UKI = 2\pi - \pi = \pi$$

y, por tanto, el cuadrilátero $RIKU$ es ciclico.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega