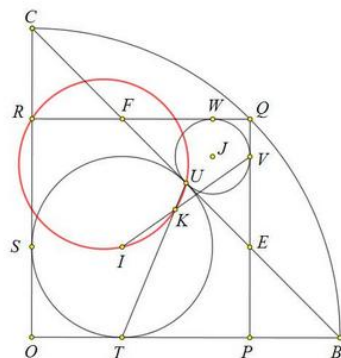


Problema 929

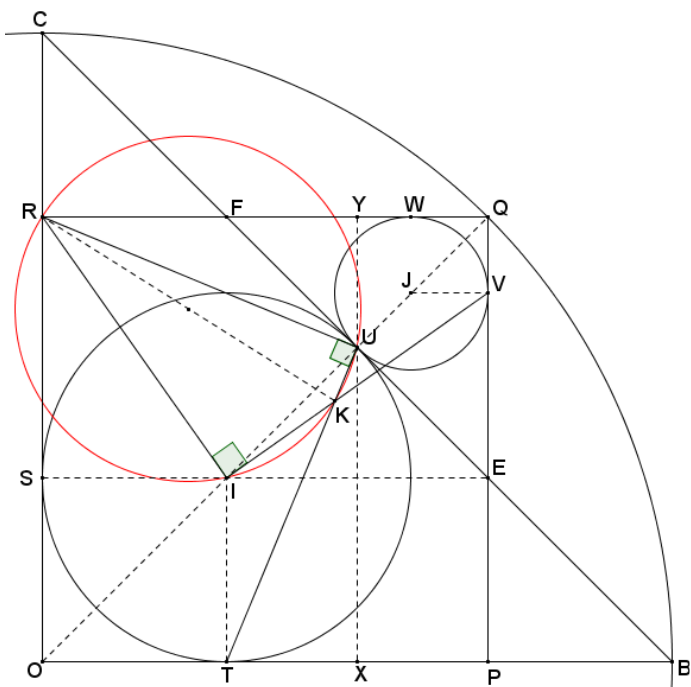
- ★ $\odot(OBC)$ quarter of circle (O, OB)
- ★ $OPQR$ square inscribed in mixtilinear triangle OBC
- ★ $E = PQ \cap BC, F = RQ \cap BC$
- ★ I, J incenters of $\triangle OBC, \triangle FQE$, resp.
- ★ S, T, U, V, W touch points
- ★ $K = IV \cap TU$



Prove that: I, K, U, R are concyclic

Suppa E. (communication personal)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme n°1 : Les segments UR et UT sont perpendiculaires deux à deux

Le point U se projette en X sur OB et Y sur QR. On pose $OP = OR = 1$. On en déduit $OB = \sqrt{2}$ et les coordonnées de U $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Le triangle rectangle RUY a pour cathètes $YR = \sqrt{2}/2$ et $YU = 1 - \sqrt{2}/2$. Le centre I du cercle inscrit dans le triangle OBC est tel que $IU^2 = IT^2$ et $OU = 1 = IT \sqrt{2} + IU$. On en déduit : $OT = IT = \sqrt{2} - 1$ puis $TX = \sqrt{2}/2 - (\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}/2$. Par ailleurs $UX = \sqrt{2}/2$. Les triangles rectangles RUY et UTX sont donc isométriques. D'où $RU = UT$ et $\angle RUT = 90^\circ$

Lemme n°2 : Les segments IR et IV sont perpendiculaires deux à deux

Les triangles rectangles isocèles OBC, QEF, OIT et QJV sont tous semblables.

On a $QE = PQ - PE = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$.

D'où $JV/OT = QE/OB = \sqrt{2} - 1$, $JV = OV = IT \cdot (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$,

$VE = 1 - PE - VQ = \sqrt{2} - 1 = OT = IS$.

Les triangles rectangles RSI et VEI sont isométriques avec $RS = IE = 2 - \sqrt{2}$ et $IS = VE$.

D'où $IR = IV$ et $\angle RIV = 90^\circ$

Corollaire. Les droites IV et TU se coupent en un point K tel que les quatre points I, K, U et R sont sur un même cercle de diamètre RK dans lequel sont inscrits les deux triangles rectangles RIK et RUK.