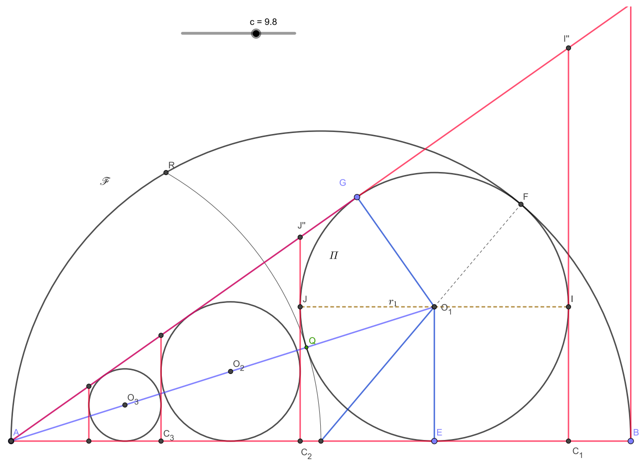
Problema 1 (Comunicante anónimo) *Dado un segmento AB de longitud c que es diámetro de una semicircunferencia $\mathcal{F}$ y sea M su punto medio. Con centro en A y radio AM se traza el arco de circunferencia MR $(R \in \mathcal{F})$ Calcular en función de c el radio de la circunferencia inscrita (centro O_1) en el triángulo mixtilíneo MRB*
Determina el $\triangle ABC$ rectángulo en B de manera que (O_1) sea tangente interiormente a los lados AB y AC. Determina la longitud de BC y AC en función de c
A continuación, para cada $n \in N \sim \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo AC_nD_n, siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CB y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) tal como se muestra en la siguiente figura



Calcula en función de c la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $\{(O_n)\}_{n \in N}$

Sea Π la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo MRB cuyo centro denominaremos O_1y sean Q, F y E los puntos de contacto de Π con el arco MB, semicircunferencia $\mathcal{F}$ y segmento AB. Vamos a calcular el radio $r_1$de Π

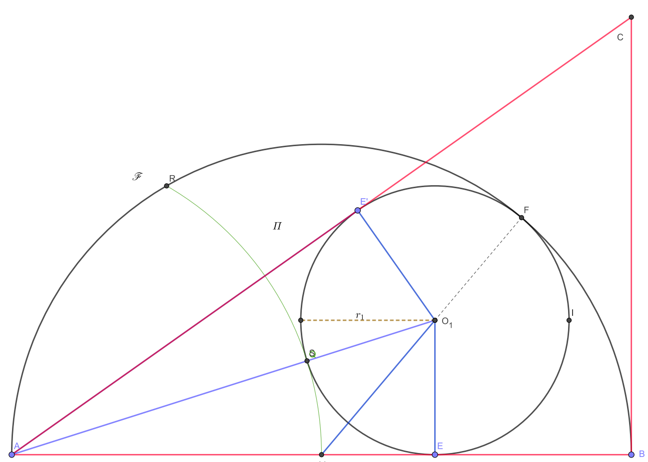


Figura 1

En el $\triangle AO_1E$ rectángulo en E tenemos $\left[\begin{array}{c} AO_1 = AQ + QO_1 = \frac{c}{2} + r_1 \\ O_1E = r_1 \end{array}\right]$ Por lo que

$$AE = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + r_1\right)^2 - r_1^2}$$

En el $\triangle MO_1E$ rectángulo también en E tenemos $\left[\begin{array}{c} ME = AE - AM = \sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2} \\ O_1E = r_1 \end{array}\right]$.Por lo que

$$MO_1^2 = r_1^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2}\right)^2 \tag{1}$$

Por otra parte como

$$MO_1 = MF - FO_1 = \frac{c}{2} - r_1 \tag{2}$$

Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{c}{2} - r_1\right)^2 = r_1^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2}\right)^2$$

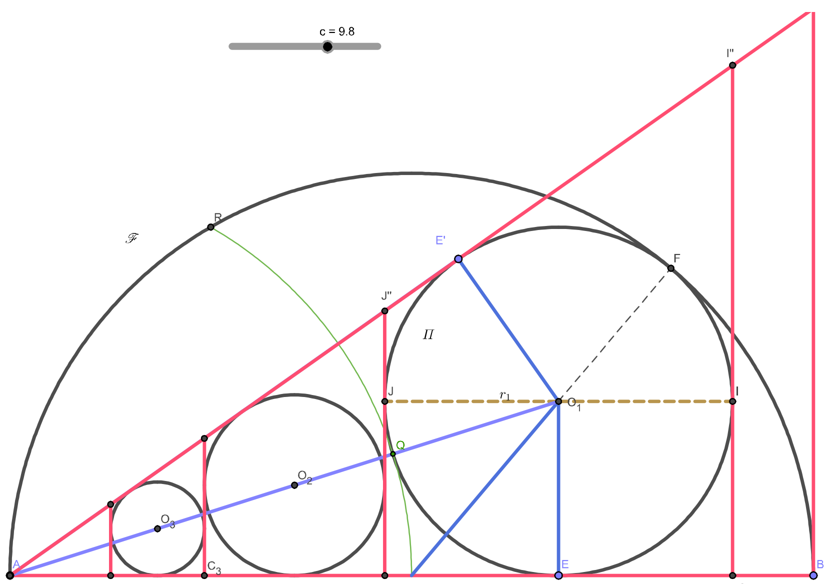
Resolviéndola

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}c}{8}$$

Nota: $AE = \sqrt{\left(\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}c}{8}\right)^2 - \frac{3c^2}{64}} = \frac{(\sqrt{3}+1)c}{4}$ $O_1E = \frac{\sqrt{3}c}{8}$ y $AO_1 = \frac{(\sqrt{3}+4)c}{8}$

Si aplicamos una simetría axial de eje la recta AO_1 al $\triangle AEO_1$ obtendremos el $\triangle AE'O_1$. Es obvio que la recta AO_1 es bisectriz interior del triángulo AEE' y $AE = AE'$

Prolongando el segmento AE' hacia la derecha y levantando desde B una perpendicular al segmento AB obtenemos el punto C.



Si consideramos en Π un diámetro paralelo al segmento AB se obtienen los puntos I, J y trazando sus perpendiculares al segmento AB, éstas cortan a dicho segmento en C_1, C_2 respectivamente y al lado AC del$\triangle ABC$ en I'', J'' respectivamente. Por todo ello; los segmentos AC_1 Y AC_2 son

$$AC_1 = AE + EC_1 = \frac{(\sqrt{3}+1)\,c}{4} + \frac{\sqrt{3}c}{8} = \frac{(3\sqrt{3}+2)\,c}{8}$$

$$AC_2 = AE - EC_2 = \frac{(\sqrt{3}+1)\,c}{4} - \frac{\sqrt{3}c}{8} = \frac{(\sqrt{3}+2)\,c}{8}$$

Para obtener la circunferencia (O_2) del problema bastará con aplicarle a (O_1) una homotecia de centro A y radio $\frac{AC_2}{AC_1} = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)c}{\left(3\sqrt{3}+2\right)c} = \frac{4\sqrt{3}+5}{23}$

Lo que nos permite afirmar que el radio r_2 de (O_2) será $r_2 = \frac{4\sqrt{3}+5}{23}r_1$

Si a (O_2) le aplicamos la misma homotecia obtendremos (O_3). Siendo su radio $r_3 = \frac{4\sqrt{3}+5}{23}r_2 = \left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23}\right)^2 r_1$

Reiterando este proceso n veces el radio de (O_n) será $r_n = \left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23}\right)^{n-1} r_1$

Como la superficie del círculo (O_n) es $S_n = \pi r_n^2 = \pi \left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23}\right)^{2n-2} \frac{3c^2}{64}$

La suma de las infinitas áreas de los circulos (O_n) es

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\pi 3c^2}{64} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23}\right)^{2n-2} = \frac{\pi 3c^2}{64} \frac{1}{1-\left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23}\right)^2} \\
\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{3\pi c^2}{64} \left(\frac{5}{48}\sqrt{3} + \frac{19}{16}\right)
\end{aligned}$$

Vamos por último a calcular ahora BC y AC

En $\triangle AEO_1$ rectángulo en E tenemos $AE = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)c}{4}$,$O_1E = \frac{\sqrt{3}c}{8}$ y $AO_1 = \frac{\left(\sqrt{3}+4\right)c}{8}$

Si $\alpha = \widehat{BAC}$ entonces $\frac{\alpha}{2} = \widehat{EAO_1}$ y $\left[\begin{array}{c} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AE}{AO_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{\sqrt{3}+4}{8}} = \frac{6\sqrt{3}+2}{13} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O_1E}{AO_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}+4}{8}} = \frac{4\sqrt{3}-3}{13} \end{array}\right]$

Como $\left[\begin{array}{c} \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right]$ entonces

$$\left[\begin{array}{c} \sin\alpha = 2\frac{6\sqrt{3}+2}{13}\frac{4\sqrt{3}-3}{13} = \frac{132-20\sqrt{3}}{169} \\ \cos\alpha = \left(\frac{6\sqrt{3}+2}{13}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)^2 = \frac{48}{169}\sqrt{3} + \frac{55}{169} \end{array}\right] \text{ y } \tan\alpha = \frac{132-20\sqrt{3}}{48\sqrt{3}+55} = \frac{44}{23}\sqrt{3} - \frac{60}{23}$$

Si consideramos ahora el $\triangle ABC$

$$BC = AB\tan\alpha = \frac{\left(44\sqrt{3}-60\right)c}{23}$$

Como $AC = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$$AC = \frac{\frac{\left(44\sqrt{3}-60\right)c}{23}}{\frac{132-20\sqrt{3}}{169}} = \left(\frac{48}{23}\sqrt{3} - \frac{55}{23}\right)c$$