Problema 1 (Comunicante anónimo) *Dado un segmento AB de longitud c que es diámetro de una semicircunferencia $\mathcal{F}$ y sea M su punto medio. Con centro en A y radio AM se traza el arco de circunferencia MR $(R \in \mathcal{F})$ Calcular en función de c el radio de la circunferencia inscrita (centro O_1) en el triángulo mixtilíneo MRB*
Determina el $\triangle ABC$ rectángulo en B de manera que (O_1) sea tangente interiormente a los lados AB y AC. Determina la longitud de BC y AC en función de c
A continuación, para cada $n \in N \sim \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo AC_nD_n, siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CB y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) tal como se muestra en la siguiente figura

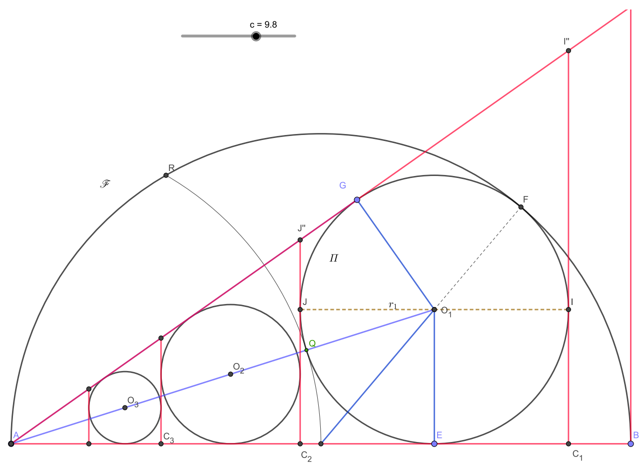

Figura 1

Calcula en función de c la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $\{(O_n\}_{n\in N}$

Solución

Sea Π la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo MRB cuyo centro denominaremos O_1y sean Q, F y E los puntos de contacto de Π con el arco MB, semicircunferencia $\mathcal{F}$ y segmento AB. Vamos a calcular el radio $r_1$de Π

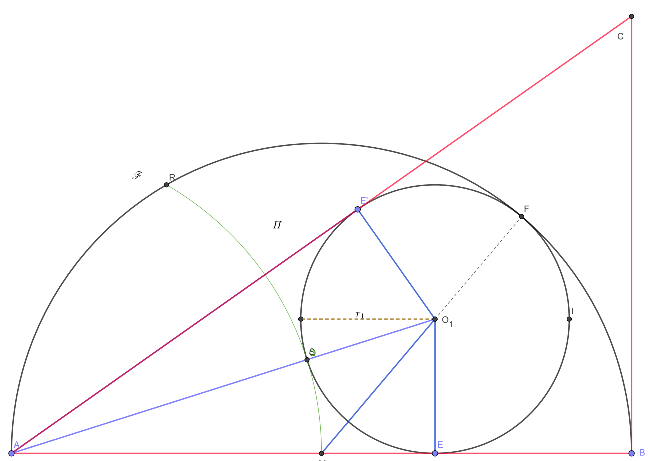

Figura 2

En el $\triangle AO_1E$ rectángulo en E tenemos $\left[\begin{array}{c} AO_1 = AQ + QO_1 = \frac{c}{2} + r_1 \\ O_1E = r_1 \end{array}\right]$ Por lo que

$$AE = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + r_1\right)^2 - r_1^2}$$

En el $\triangle MO_1E$ rectángulo también en E tenemos $\left[\begin{array}{c} ME = AE - AM = \sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2} \\ O_1E = r_1 \end{array}\right]$.Por lo que

$$MO_1^2 = r_1^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2}\right)^2 \tag{1}$$

Por otra parte como

$$MO_1 = MF - FO_1 = \frac{c}{2} - r_1 \tag{2}$$

Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{c}{2} - r_1\right)^2 = r_1^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}+r_1\right)^2 - r_1^2} - \frac{c}{2}\right)^2$$

$$\text{Resolviéndola } r_1 = \frac{\sqrt{3}c}{8}$$

Nota: $AE = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}c}{8}\right)^2 - \frac{3c^2}{64}} = \frac{(\sqrt{3}+1)c}{4}$ $O_1E = \frac{\sqrt{3}c}{8}$ y $AO_1 = \frac{(\sqrt{3}+4)c}{8}$

Si aplicamos una simetría axial de eje la recta AO_1 al $\triangle AEO_1$ obtendremos el $\triangle AE'O_1$. Es obvio que la recta AO_1 es bisectriz interior del triángulo AEE' y $AE = AE'$

Prolongando el segmento AE' hacia la derecha y levantando desde B una perpendicular al segmento AB obtenemos el punto C.

- Vamos a calcular BC y AC

En $\triangle AEO_1$ rectángulo en E tenemos $AE = \frac{(\sqrt{3}+1)c}{4}$,$O_1E = \frac{\sqrt{3}c}{8}$ y $AO_1 = \frac{(\sqrt{3}+4)c}{8}$

Si $\alpha = \widehat{BAC}$ entonces $\frac{\alpha}{2} = \widehat{EAO_1}$ y $\left[\begin{array}{c} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AE}{AO_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{\sqrt{3}+4}{8}} = \frac{6\sqrt{3}+2}{13} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O_1E}{AO_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}+4}{8}} = \frac{4\sqrt{3}-3}{13} \end{array}\right]$

Como $\left[\begin{array}{c} \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right]$ entonces $\left[\begin{array}{c} \sin\alpha = 2\frac{6\sqrt{3}+2}{13}\frac{4\sqrt{3}-3}{13} = \frac{132-20\sqrt{3}}{169} \\ \cos\alpha = \left(\frac{6\sqrt{3}+2}{13}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)^2 = \frac{48}{169}\sqrt{3} + \frac{55}{169} \end{array}\right]$

Y $\tan\alpha = \frac{132-20\sqrt{3}}{48\sqrt{3}+55} = \frac{44}{23}\sqrt{3} - \frac{60}{23}$

Si consideramos ahora el $\triangle ABC$.

$$BC = AB\tan\alpha = \frac{\left(44\sqrt{3}-60\right)c}{23}$$

Como $AC = \frac{BC}{\sin\alpha} \to AC = \frac{\frac{(44\sqrt{3}-60)c}{23}}{\frac{132-20\sqrt{3}}{169}} = \left(\frac{48}{23}\sqrt{3} - \frac{55}{23}\right)c$

- Vamos a determinar la suma de los infinitos círculos descritos en el problema.

Para ello voy a utilizar la fórmula obtenida en el problema 927 (por un comunicante anónimo) ya que la situación en este problema es un caso particular del problema 927 .

Y como en él se demostró

$$S = \frac{\pi c^4(b-c)^3}{a^5} \tag{a}$$

En nuestro caso particular $AB = c, BC = \frac{(44\sqrt{3}-60)c}{23}$ y $AC = \left(\frac{48}{23}\sqrt{3} - \frac{55}{23}\right)c$

Por la relación (a)

$$S = \pi\frac{c^4(\left(\frac{48}{23}\sqrt{3} - \frac{55}{23}\right)c - c)^3}{\frac{\left(44\sqrt{3}-60\right)^5 c^5}{23^5}} = \frac{3c^2}{64}\left(\frac{5}{48}\sqrt{3} + \frac{19}{16}\right)$$