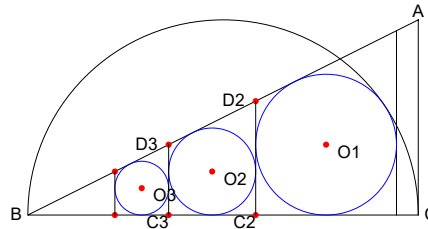


Pr. Cabri 927 y 930

Enunciado (927)

Out[341]=

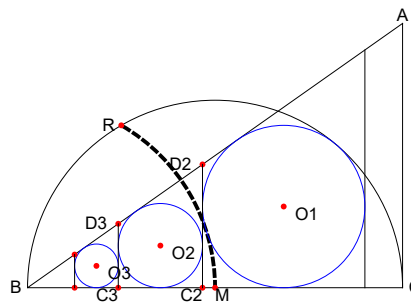


Dadas las circunferencias de la figura se trata de calcular la suma de las áreas de las circunferencias centradas en O_i con $i \in \mathbb{Z}$, en función de las medidas a , b , c , de los lados del triángulo ABC.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Enunciado (930)

Out[320]=



Al círculo O_1 del problema 927 se le impone la condición de que sea tangente al segmento BC, al semicírculo de diámetro BC y al arco MR de centro B y radio BM (M punto medio de BC).

Se pide calcular el vértice A y las áreas de los O_i en función del lado a .

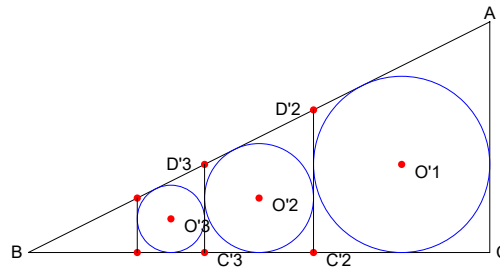
Propuesto por comunicante anónimo

Solución

de César Beade Franco

I. Repetimos la solución del Pr. 927.
Observemos el siguiente dibujo

Out[342]=



El círculo O'1 tiene radio $\frac{1}{2} (a + b - c)$ con lo que su área es $\frac{\pi}{4} (a + b - c)^2$.

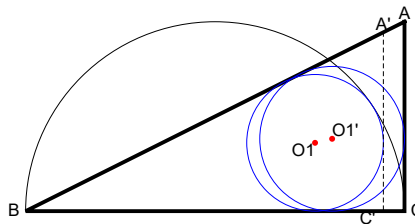
A partir de este radio estamos en condiciones de calcular la longitud del segmento C'2D'2 y el área del trapecio ACC'2D'2. El segmento mide $\frac{b(c-b)}{a}$ y dicha área es $\frac{b^2(c-b)}{a}$.

El área de la suma de todos los círculos está, con respecto a la del triángulo en la misma proporción que la del círculo O1 y el trapecio, es decir $\frac{\Sigma O'i}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{\pi}{4}(a+b-c)^2}{\frac{b^2(c-b)}{a}} \Rightarrow \Sigma O'i =$

$$\frac{a^2 (a+b-c)^2 \pi}{8 b (-b+c)}.$$

Pasamos de este dibujo al del enunciado mediante una homotecia centrada en B y de razón la de los radios de O'1 y O1.

Out[343]=



El círculo O1 es el círculo de Apolonio (uno de ellos) de las rectas AB y AC y el círculo de diámetro BC y tiene radio $-\frac{2a^2 + ab + b^2 - 2ac - bc}{b^2} (*)$.

Así pues la razón de homotecia que transforma O'1 en O1 es $k = \frac{-\frac{a(2a^2 + ab + b^2 - 2ac - bc)}{b^2}}{\frac{1}{2}(a+b-c)} = \frac{2a(c-a)}{b^2}.$

De donde $\Sigma Oi = k^2 \Sigma O'i = \frac{a^2 (a+b-c)^2 \pi}{8 b (c-b)} \left(\frac{2a(c-a)}{b^2} \right)^2 = \frac{a^4 (a-c)^2 (a+b-c)^2 \pi}{2 b^5 (-b+c)}.$

Teniendo en cuenta que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, sustituyéndola en la última expresión y desarrollándola obtenemos

$$\frac{a^4 \left(-a + \sqrt{a^2 + b^2} \right)^3 \pi}{b^5} = \frac{a^4 (-a+c)^3 \pi}{b^5} (**)$$

II Pasemos al problema 930.

Calculamos el círculo que cumple esas condiciones, que es uno de los círculos de Apolonio (caso CCR) de dos circunferencias (una centrada en B y otra en M, ambas con radio $\frac{a}{2}$) y la recta BC.

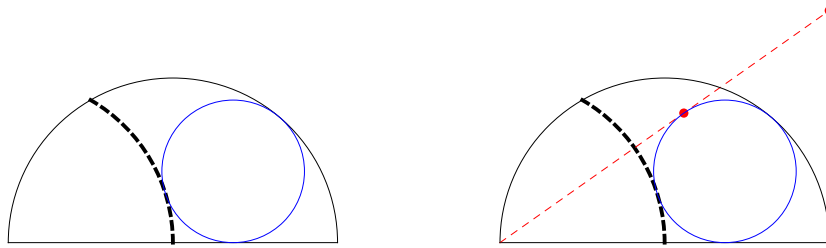
Este círculo tiene centro $O1\left(\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})a, \frac{\sqrt{3}a}{8}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{3}a}{8}$. Las tangentes desde B a este círculo nos proporciona los lados BA y BC del triángulo. Sus puntos de tangencia son

$T1\left(\frac{1}{676}(199 + 103\sqrt{3})a, \frac{2}{169}(9 + 14\sqrt{3})a\right)$ y $T2\left(\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})a, 0\right).$

Intersecando la recta BT1 con la perpendicular a BC por C obtenemos el vértice

$$A(a, \frac{8(9+14\sqrt{3})a}{199+103\sqrt{3}}).$$

Out[387]=



Concluimos que el triángulo $A(a, \frac{8(9+14\sqrt{3})a}{199+103\sqrt{3}})$, $B(0,0)$ y $C(a,0)$ cumple las condiciones del problema.

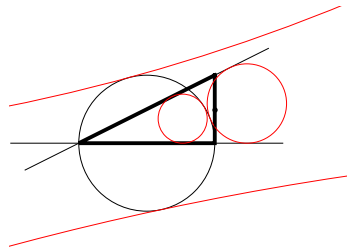
Sus lados miden a , $b = \frac{8(9+14\sqrt{3})a}{199+103\sqrt{3}}$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sustituyendo estos valores en la expresión para el área de los círculos obtenida en el pr. 927 tenemos que

$$\Sigma O_i = \frac{a^4 (-a+c)^3 \pi}{b^5} = \frac{(57+5\sqrt{3})a^2 \pi}{1024}.$$

(*) Se pueden obtener los círculos de Apolonio resolviendo un sistema de 3 ecuaciones cuadráticas considerando que las distancias del centro de estos círculos a cada recta y al círculo dado son las mismas e iguales a su radio. Los cálculos se simplifican tomando el triángulo $A(a,b)$, $B(0,0)$ y $C(a,0)$, cuyos lados miden a , b y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Out[348]=



(**) Hay que resaltar que esta expresión es la misma que $\frac{a^4 b \pi}{(a+c)^3}$ (obtenida por M.A.Pérez y S. Campo) y que $\frac{a^4 (a-c)^2 (a+b-c)^2 \pi}{2 b^5 (-b+c)}$ (enviada por mí). Basta tener en cuenta que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para reducir unas a otras.