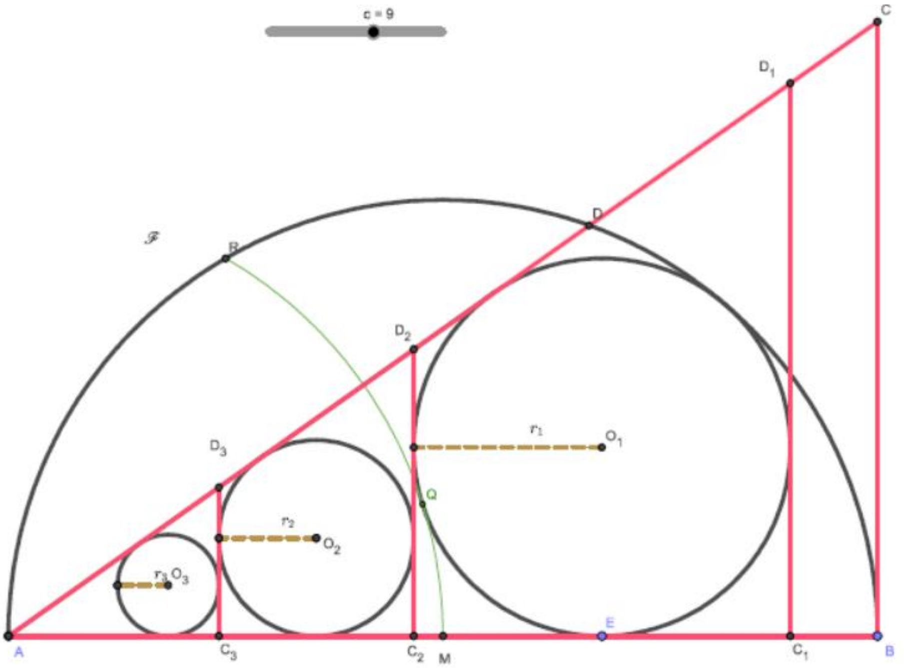
Problema 930.-

Problema 1 *Dado un segmento AB de longitud c que es diámetro de una semicircunferencia $\mathcal{F}$ y sea M su punto medio. Con centro en A y radio AM se traza el arco de circunferencia MR ($R \in \mathcal{F}$) Calcular en función de c el radio de la circunferencia inscrita (centro O_1) en el triángulo mixtilíneo MRB*

Determina el $\triangle ABC$ rectángulo en B de manera que (O_1) sea tangente interiormente a los lados AB y AC. Determina su longitud en función de c

A continuación, para cada $n \in N \sim \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo AC_nD_n, siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta CB y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) tal como se muestra en la siguiente figura



Calcula en función de c la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $\{(O_n\}_{n\in N}$

Comunicación anónimo. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Para hallar el valor de $ME = x; O_1E = r_1$ necesarios para determinar tanto la posición como el radio de la circunferencia (O_1), consideramos el sistema de ecuaciones

$\left\{\left(r_1+\frac{c}{2}\right)^2 = \mathrm{r}_1^2 + \left(\frac{c}{2}+x\right)^2, \left(\frac{c}{2}-r_1\right)^2 = x^2 + \mathrm{r}_1^2\right\}$ que nos proporcionarán los valores

$\{r_1 \to \frac{\sqrt{3}c}{8}, x \to \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)c\}$

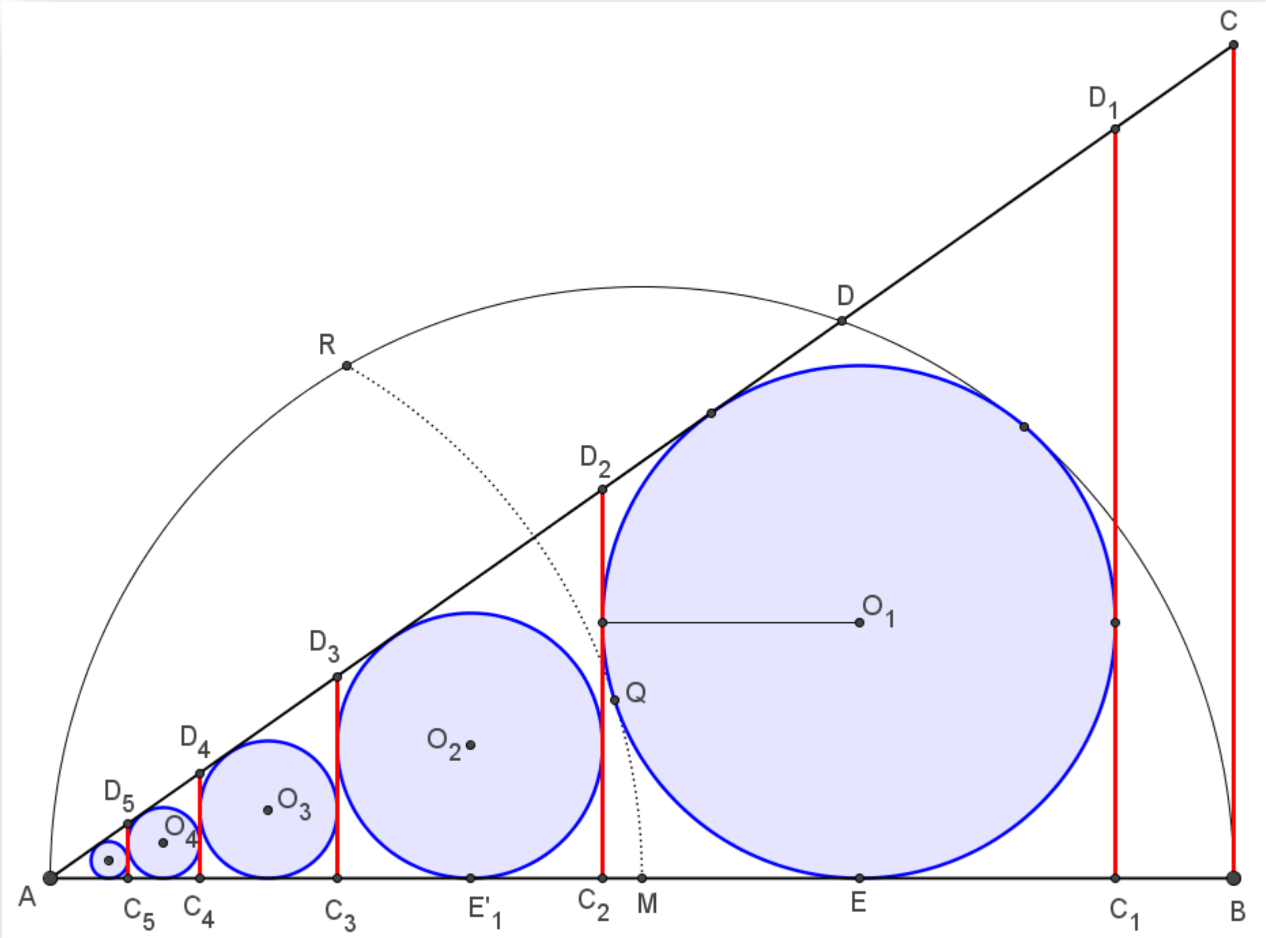
Si llamamos $y = BC$, podemos determinar la longitud de este segmento sin más que tener en cuenta que $2\alpha = \measuredangle CAB$, siendo $\alpha = \measuredangle O_1AE$. Como sabemos que:

$$sin\alpha = \frac{r_1}{\frac{c}{2}+x}; \quad cosx = \frac{\frac{c}{2}+x}{\frac{c}{2}+r_1}; \tan\alpha = \frac{r_1}{\frac{c}{2}+x} \to tan2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{c} = \frac{\frac{4r}{c+2x}}{1-\frac{4r^2}{(c+2x)^2}}$$

$$\frac{y}{c}=\frac{\frac{4r}{c+2x}}{1-\frac{4r^2}{(c+2x)^2}} \rightarrow \ y=\mathrm{BC}=\frac{4(3+\sqrt{3})c}{13+8\sqrt{3}}$$

De la semejanza entre los triángulos $ABC\ y\ AC_1D_1$, obtenemos que $C_1D_1=\frac{(15+11\sqrt{3})c}{26+16\sqrt{3}}$

Por el mismo procedimiento, podemos hallar $C_2D_2=\frac{(9+5\sqrt{3})c}{26+16\sqrt{3}}$



Consideramos la homotecia de centro el punto A y de razón $k=\frac{C_2D_2}{C_1D_1}=\frac{1}{23}(5+4\sqrt{3})$ que transforma la circunferencia (O_1) en la circunferencia (O_2) y, en general, la circunferencia (O_{n-1}) $en\ la$ (O_n).
De este modo, la sucesión de áreas $S_1=\pi r_1^2; S_2=\pi r_1^2k^2; \dots; S_n=\pi r_1^2k^{2n}$.
Como quiera que la razón $R=k^2$ de la Progresión Geométrica de la sucesión de las áreas de estas circunferencias $R=k^2<1$, entonces:

$$\mathrm{S}=\frac{\pi {r_1}^2}{1-k^2}=\frac{57+5\sqrt{3}}{1024}\pi c^2$$