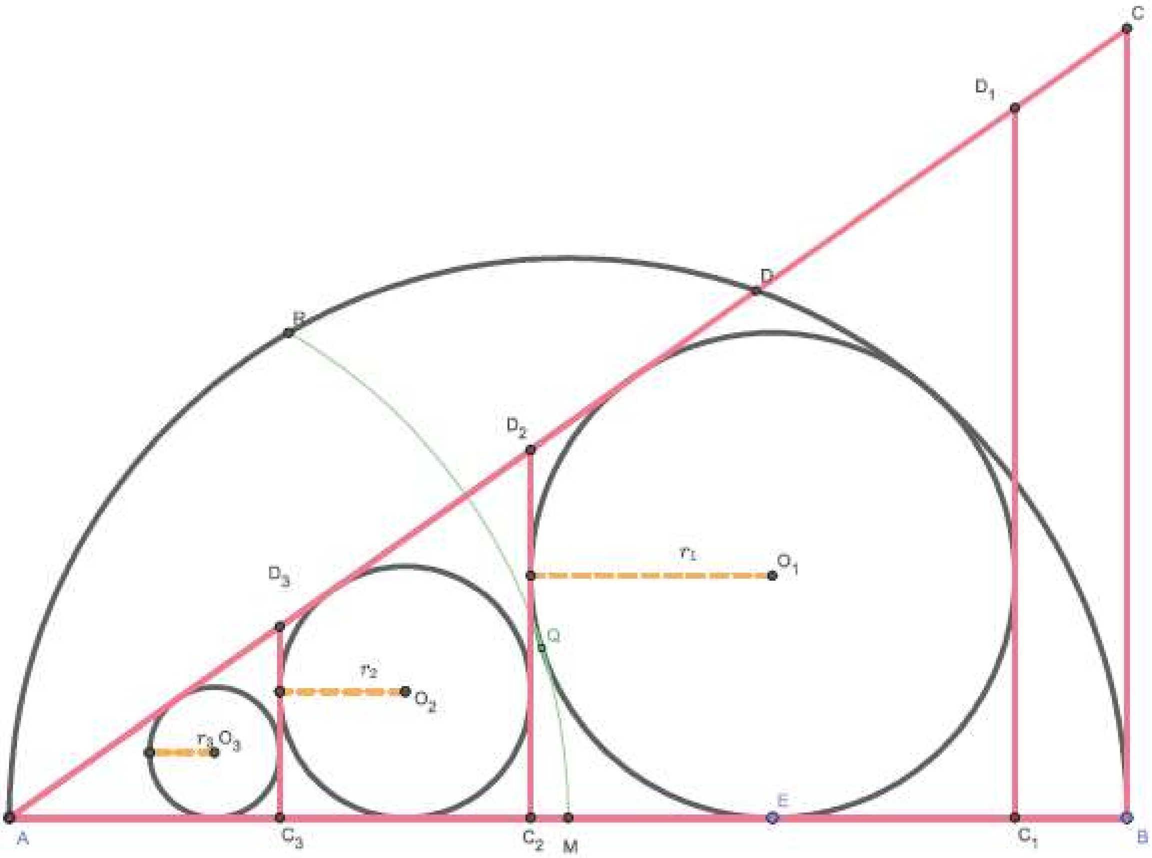
Problema 930. (comunicante anónimo, 2019) Sea AB un segmento de longitud c que es diámetro de una semicircunferencia centrada en su punto medio M. Con centro en el punto A y radio AM se traza un arco de circunferencia MR, con R situado en la semicircunferencia (M).

① Calcular, en función de c, el radio de la circunferencia (O_1) inscrita en el triángulo mixtilíneo MBR.

② Determinar el triángulo ABC, rectángulo en B, tal que la circunferencia (O_1) sea tangente interiormente a los segmentos AB y AC.

③ Para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo BC_nD_n, siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n es paralela a la recta BC y tangente a la circunferencia (O_{n-1}), tal como se musetra en la siguiente figura:



Calcular, en función de c, la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $((O_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución:

① Considerando la inversión con respecto a la circunferencia (A) cuyo radio es $AM = \dfrac{c}{2}$, se verifica que:

❶ La circunferencia (A) se mantiene invariante.

❷ La circunferencia (M) se transforma en la recta r_m, siendo el punto B' la imagen del punto B, por lo que:

$$AB' = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{AB} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{c} = \frac{c}{4}$$

❸ La circunferencia (Z), cuyo radio r podemos determinar aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo $AE'Z$:

$$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{c}{4} + r\right)^2 \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$$

se transforma en la circunferencia (O_1), cuyo radio es:

$$r_1 = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)r}{|AZ^2 - r^2|} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)r}{|AE'^2 + r^2 - r^2|} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)r}{(AB' + r)^2} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}\right)}{\left(\frac{c}{4} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)c$$

❹ La recta AB se mantiene invariante, siendo el punto E' la imagen del punto E, por lo que:

$$AE = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{AE'} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{AB' + r} = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\frac{c}{4} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)c$$

② Si llamamos $\theta = \measuredangle EAO'$, como:

$$\tan\theta = \frac{r_1}{AE} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)c}{\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)c} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$$

entonces:

$$a = BC = \tan(2\theta)c = \left(\frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)c = \left[\frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}{1 - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)^2}\right]c = \left(\frac{44\sqrt{3} - 60}{23}\right)c$$

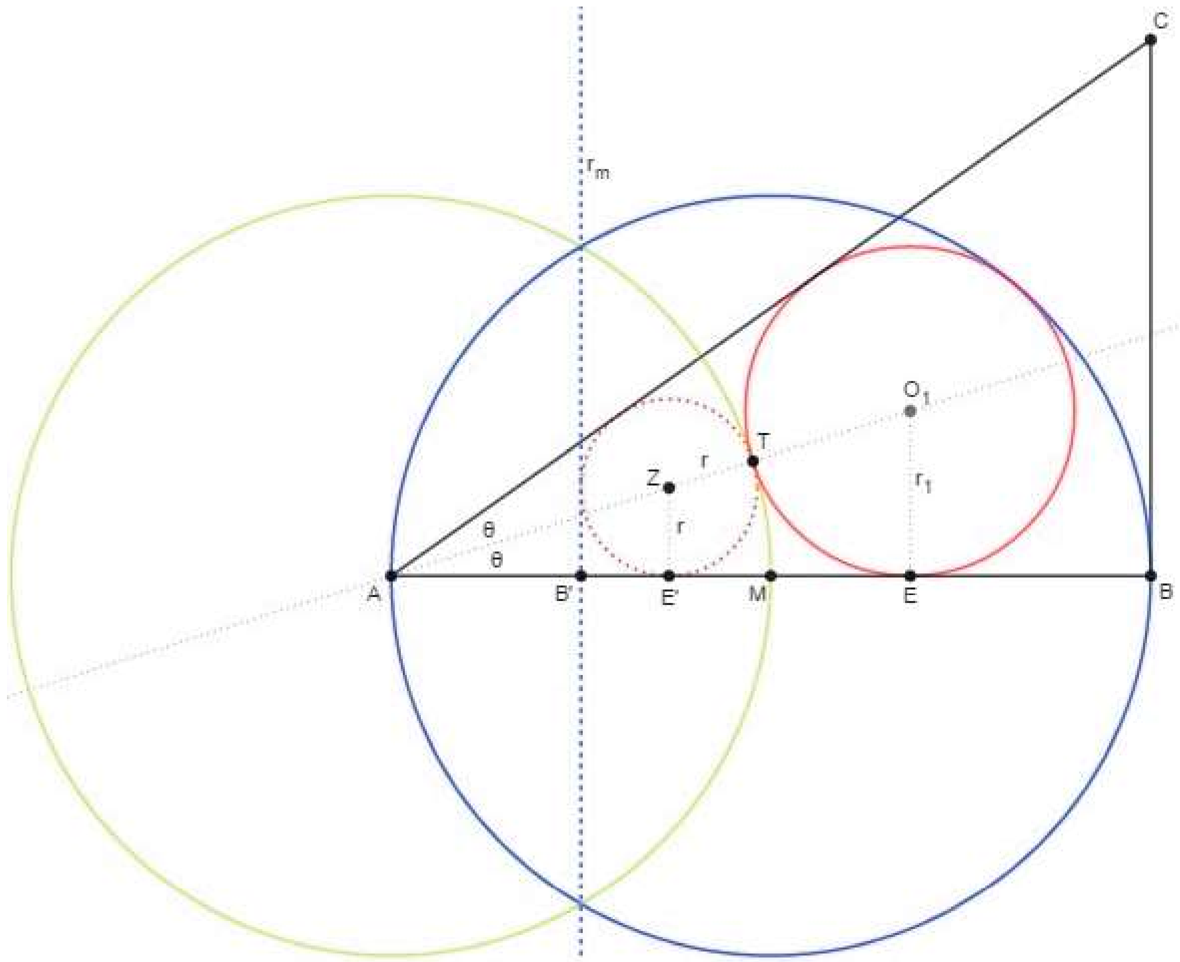
y, además:

$$b = AC = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{44\sqrt{3} - 60}{23}\right)c\right]^2 + c^2} = \left(\frac{48\sqrt{3} - 55}{23}\right)c$$

③ Una vez determinadas, en función de c, las longitudes de los lados del triángulo ABC, el resto del problema es idéntico al Problema 927, por lo que basta con aplicar la fórmula deducida en el:

$$\Delta = \frac{\pi c^4 a}{(b + c)^3} = \pi\left(\frac{5\sqrt{3} + 57}{1024}\right)c^2$$

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega