

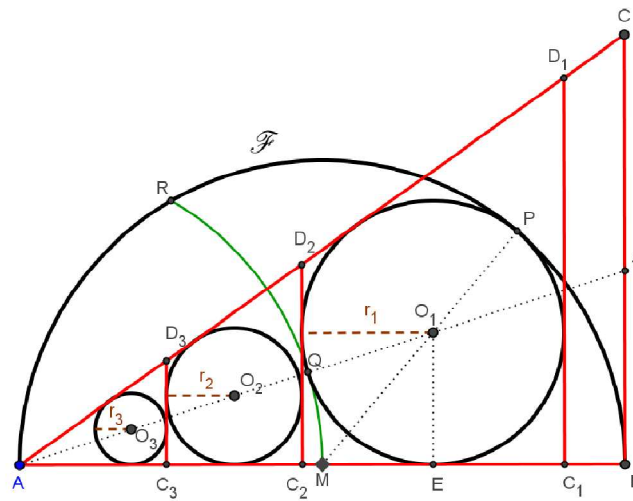
Problema 930

Problema 1.- Dado un segmento AB de longitud c que es diámetro de una semicircunferencia $\mathcal{F}$ y sea M su punto medio. Con centro en A y radio AM se traza el arco de circunferencia MR ($R \in \mathcal{F}$)

a) Calcular en función de c el radio de la circunferencia inscrita (centro O_1) en el triángulo mixtilíneo MRB .

b) Determina el $\triangle ABC$ rectángulo en B de manera que (O_1) sea tangente interiormente a los lados AB y AC . Determina su longitud en función de c .

c) A continuación, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, se considera la circunferencia (O_n) inscrita en el triángulo AC_nD_n , siendo C_n un punto de la recta AB y D_n un punto de la recta AC tales que la recta C_nD_n sea paralela a la recta CB y tangente a la circunferencia (O_{n-1}) tal como se muestra en la siguiente figura



Calcula en función de c la suma total de las áreas encerradas por las circunferencias de la sucesión $\{(O_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Comunicante anónimo (2019) comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

a) Vamos a llamar $y_1 = r_1$ al radio de la circunferencia (O_1) ; x_1 a la distancia de M a E , punto de tangencia de (O_1) con AB y Q al de tangencia con el arco $(A; MR)$.

El punto O_1 queda fijado con estos dos números.

Se tiene $MO_1 = MP - r_1 = \frac{c}{2} - y_1$ y $AO_1 = AQ + QO_1 = \frac{c}{2} + y_1$.

Las condiciones de tangencia que ha de verificar la circunferencia que buscamos se obtienen de aplicar el teorema de Pitágoras a dos triángulos rectángulos.

Si se aplica al triángulo $\triangle MO_1E$ obtenemos la relación $\left(\frac{c}{2} - y_1\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow cy_1 = \frac{c^2}{4} - x_1^2$

Si se aplica a $\triangle AEO_1$ la relación es $\left(\frac{c}{2} + y_1\right)^2 = \left(x_1 + \frac{c}{2}\right)^2 + y_1^2 \Leftrightarrow cy_1 = x_1^2 + cx_1$

La solución del sistema $\begin{cases} cy_1 = \frac{c^2}{4} - x_1^2 \\ cy_1 = x_1^2 + cx_1 \end{cases}$ es $(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}c, \frac{\sqrt{3}}{8}c\right)$.

El radio (O_1) es $y_1 = r_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}c$.

b) Ahora añadimos la condición de que este punto esté situado sobre la bisectriz de A .

La pendiente de esta recta, según el teorema de la bisectriz es $k = \frac{BS}{AB} = \frac{a}{b+c}$.

Por otra parte, del triángulo ΔAEO_1 se obtiene $k = \frac{r_1}{AE} = \frac{y_1}{x_1 + \frac{c}{2}}$.

Uniendo ambas $k = \frac{a}{b+c} = \frac{y_1}{x_1 + \frac{c}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{3}+1}{4}} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$. ($\angle A = 35,1759^\circ$)

Para eliminar la b en $k = \frac{a}{b+c}$ primero se separa y luego se eleva al cuadrado. Se tiene

$$bk = a - ck \Rightarrow (a^2 + c^2)k^2 = a^2 + c^2k^2 - 2ack \Rightarrow (1 - k^2)a = 2ck \Rightarrow a = \frac{2k}{1-k^2} \cdot c$$

y sustituyendo k se obtiene

$$a = \frac{44\sqrt{3} - 60}{23}c$$

Y ahora $b = \frac{a}{k} - c = \left(\frac{2}{1-k^2} - 1\right)c = \frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot c$, obteniendo

$$b = \frac{48\sqrt{3} - 55}{23}c$$

c) La razón de semejanza que pasa de AC_1 a AC_2 es la de los segmentos $AE \mp r_1$.

$$\mu = \frac{AC_2}{AC_1} = \frac{AE-r_1}{AE+r_1} = \frac{(AM+x_1)-y_1}{(AM+x_1)+y_1} = \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}+2} = \frac{4\sqrt{3}+5}{23} = \frac{b-a}{c} < 1 \quad (1)$$

Las áreas de los círculos (O_i) están en progresión geométrica.

La razón de esta progresión es $\mu^2 < 1$. La suma de las áreas de todos estos círculos es

$S = [O_1] \cdot (1 + \mu^2 + \mu^4 + \dots) = \frac{[O_1]}{1-\mu^2}$, siendo $[O_1] = \pi \cdot r_1^2 = \frac{3\pi}{64} \cdot c^2$, por tanto

$$S = \pi \cdot \frac{3}{64 \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{3}+5}{23} \right)^2 \right]} \cdot c^2 = \pi \cdot \frac{5\sqrt{3}+57}{1024} \cdot c^2$$

$$[ABC] = \frac{ac}{2} = \frac{22\sqrt{3}-30}{23} \cdot c^2$$

La razón entre las áreas de los círculos y el área del triángulo es 0.5716378554 (calculado con 'Derive'). Los círculos no completan el 60% del triángulo. ■

(1) Puede comprobarse que $\frac{b-a}{c} = \frac{s-a}{s} = \frac{s-b}{s-c}$ coincidente, con el cambio de notación, con la expresión de esta razón en el problema 927 de esta revista.