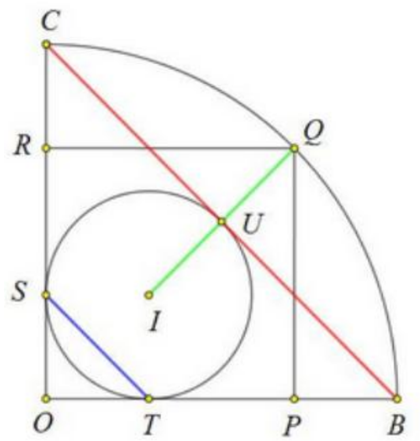
Problema 931.-

Se considera el cuadrante del círculo (O, OB). Sea OPQR el cuadrado inscrito en el triángulo mixtilíneo OBC. Sea el punto I, incentro de ΔOBC. Sean S, T, U los puntos de dicho triángulo de tangencia con su circunferencia inscrita. Sea, por fin, $K = IV \cap TU$.



Probar que $\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{TS}$.

Suppa, E. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea el triángulo rectángulo isósceles OBC de catetos $OB = OC = a$. De la igualdad entre las expresiones del área del triángulo OBC, $S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r \cdot \left(2a + \sqrt{2}a\right) \rightarrow\ r = a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, siendo r el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo. De este modo, el lado l del cuadrado OPQR, $l = a - r = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De estos cálculos, obtenemos los siguientes valores para los segmentos considerados $ST, IQ\ y\ BC$.

$ST = \sqrt{2}r = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

$BC = \sqrt{2}a$.

$IQ = \sqrt{2}l - \sqrt{2}r = \sqrt{2}(l - r) = \sqrt{2}\left(a\frac{\sqrt{2}}{2} -\ a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = a\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Entonces,

$$\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{TS} \rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{TS}}$$