

Problema 931

S'ha dibuixat un quadrant de centre O i radi $\overline{OB}$

El punt I és l' incentre del triangle $\triangle OBC$

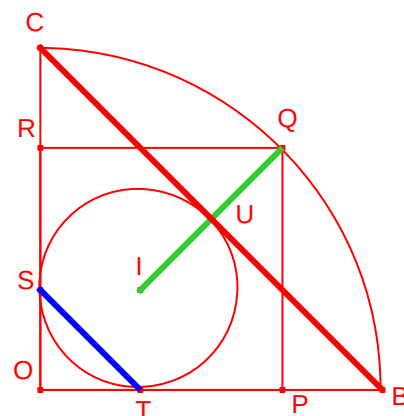
S, T, U són els punts de tangència de la circumferència inscrita

OPQR és un quadrat inscrit en els radis i l'arc del quadrant.

Proveu que

$$\frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{1}{\overline{TS}}$$

Proposat per Ercole Suppa.



Solució:

Q és el punt mig del quadrant.

Aleshores, O, I, U i Q estan alineats.

Siga $r = \overline{IT} = \overline{OT} = \overline{IU}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle OBC$

Per ser angle inscrit i abraçar un arc de 45°

$$\angle CBQ = \frac{1}{2} 45^\circ$$

$$\angle IBU = \frac{1}{2} 45^\circ$$

Aleshores els triangles rectangles $\triangle IUB, \triangle QUB$ són iguals.

Aleshores, $\overline{QU} = \overline{IU} = r$

OTIS és un quadrat de costat r.

$$\overline{TS} = \overline{OI} = r\sqrt{2}$$

$$\overline{OI} = 2r$$

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BU} = 2 \cdot \overline{OU} = 2(1 + \sqrt{2})r$$

$$\frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{2})r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\overline{TS}} = \frac{1}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{r} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aleshores,

$$\frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{1}{\overline{TS}}$$

