

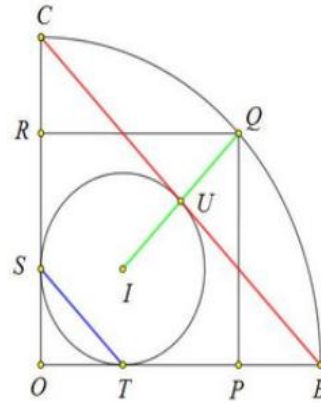
Problema 931

★ $\odot(OBC)$ quarter of circle (O, OB)

★ I incenter of $\triangle OBC$

★ S, T, U touch points

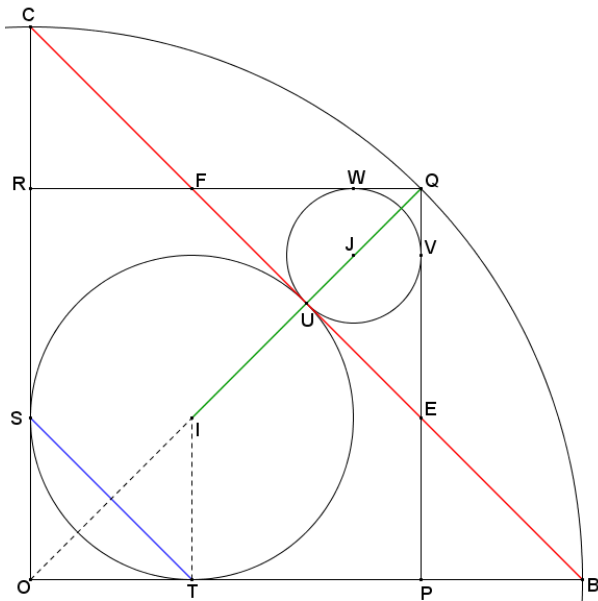
★ $OPBR$ square inscribed in mixtilinear triangle OBC



Prove that: $\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{TS}$

Suppa E. (communication personal)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On pose $OP = OR = 1$. On en déduit $OB = \sqrt{2}$ et $BC = 2$

Le centre I du cercle inscrit dans le triangle OBC est tel que $IU^2 = IT^2$ et $OI = \sqrt{2} - 1$

On en déduit : $OT = IT = \sqrt{2} - 1$ puis $ST = OI = \sqrt{2} - 1$

Par ailleurs $OQ = \sqrt{2}$. D'où $IQ = OQ - OI = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$

Il en résulte que $\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$

Or $\frac{1}{ST} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1} = 2 + \sqrt{2}$

On obtient bien l'égalité $\frac{1}{BC} + \frac{1}{IQ} = \frac{1}{ST}$