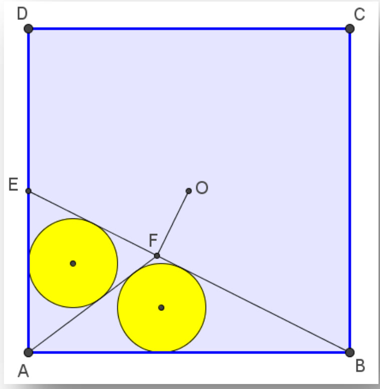
Problema 932.-

Se considera el cuadrado $ABCD$ con centro O. Sea que $AE = ED$.
Probar entonces que:

$i)$ $EF + FO = FB$.
$ii)$ Los incírculos de ΔAFE y ΔABF son congruentes.



Suppa, E. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Apartado $i)$

Consideramos el cuadrado de lado 1. Entonces tenemos que $AE = \frac{1}{2}; EB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

El triángulo ΔBEO, tiene $\frac{1}{8}$ como valor de área. Por otro lado, $[BEO] = \frac{1}{2}EB \cdot OF = \frac{1}{8} \to OF = \frac{1}{4 \cdot EB} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

La longitud del segmento EF se determinará a partir de $EF^2 = EO^2 - OF^2 \to EF^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}; EF = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Entonces $FB = EB - EF = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Queda por comprobar que, en efecto, se verifica $EF + FO = FB$.

Esto es cierto, sin más que sustituir en dicha expresión los valores antes obtenidos:

$$EF + FO = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = FB$$

Apartado $ii)$

Del triángulo AFB conocemos la altura h_F relativa al lado AB ya que $\frac{AE}{h_F} = \frac{EB}{FB} \to h_F = AE \cdot \frac{FB}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{10}$.

Por tanto, si $h_F = FF' \to F'B = \frac{3}{5}$ y $AF' = \frac{2}{5}$.

Ahora ya podemos determinar el valor de AF a partir de $AF^2 = h_F^2 + AF'^2 = \frac{9}{100} + \frac{4}{25} = \frac{25}{100} \to AF = \frac{1}{2}$.

Por fin, podemos determinar los radios de los respectivos incírculos de los triángulos ΔAFE y ΔABF.

$$[AFE] = \frac{1}{2}AE \cdot EF \cdot \sin \measuredangle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{10}.$$

$$[AFE] = \frac{1}{2}.(AF + FE + AE) \cdot r_1 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2}) \cdot r_1$$

Igualando ambas expresiones, tenemos que:

$$\frac{1}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot r_1 \to r_1 = \frac{1}{5+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{20}$$

Procediendo de un modo similar con el ΔABF, obtenemos que:

$$[ABF] = \frac{1}{2}AB \cdot h_F = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

$$[ABF] = \frac{1}{2}(AB + BF + AF) \cdot r_2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}) \cdot r_2$$

Igualando ambas expresiones, tenemos que:

$$\frac{3}{20} = \frac{15+3\sqrt{5}}{20} r_2 \to r_2 = \frac{1}{5+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{20}.$$

En efecto pues, los incírculos de ΔAFE y ΔABF son congruentes.