

Problema 931

★ $ABCD$ square with center O

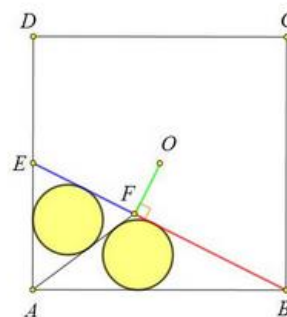
★ $AE = ED$

★ $OF \perp EB$

Prove that:

◆ $EF + FO = FB$

◆ the incircles of $\triangle AFE$ and $\triangle ABF$ are congruent



Suppa, E. (2019) comunicación personal.

Solución del director

Sea $AB=a$, $FB=m$

$$EB = \sqrt{a/2^2 + a^2} = a \frac{\sqrt{5}}{2}, OB = \frac{1}{2}DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Así, es $OF^2 = OB^2 - FB^2 = OE^2 - EF^2$

$$\text{O sea. } \frac{a^2}{2} - m^2 = \frac{a^2}{4} - (a \frac{\sqrt{5}}{2} - m)^2$$

$$\text{Así, } m = \frac{3\sqrt{5}}{10}a$$

$$EF = EB - FB = \frac{\sqrt{5}}{5}a, FO^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}, FO = \frac{\sqrt{5}}{10}a.$$

Luego, cqd, $EF + FO = FB$.

Busquemos el valor de FA. Sea H el pie de la perpendicular de F sobre AB.

$$\text{Es: } \frac{EA}{FH} = \frac{BE}{BF} \quad FH = \frac{EA \cdot BF}{BE} = \frac{\frac{a \cdot 3a\sqrt{5}}{2 \cdot 10}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{10}a$$

$$\text{Así, tenemos que } \frac{BH}{FH} = \frac{BA}{EA}, BH = \frac{FH \cdot BA}{EA} = \frac{\frac{3}{10}a \cdot a}{\frac{a}{2}} = \frac{3}{5}a, \text{ y así, } AH = 2/5 a$$

$$\text{Luego } AF = \sqrt{AH^2 + FH^2} = \sqrt{(\frac{2}{5}a)^2 + (\frac{3}{10}a)^2} = 1/2 a$$

De esta manera si r_1 es el inradio de EFA, dado que la altura del triángulo por el vértice F es $HA = 2/5 a$, tenemos

$$EA h_f = r_1 (EA + FA + FE)$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{2}{5}a = r_1 \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{5}a \right)$$

$$r_1 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5 + \sqrt{5}}{5}}a = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}a$$

Si ahora consideramos el triángulo BFA, la altura desde el vértice F es FH=3/10 a .

Si el inradio es r2, Tenemos:

$$AB FH = r_2 (AF + AB + FB)$$

$$\text{O sea, } a - \frac{3}{10}a = r_2 \left(\frac{1}{2}a + a + \frac{3\sqrt{5}}{10}a \right)$$

$$r_2 = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{20}}a = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}a$$

Cqd, los incírculos de $\triangle AFE$ y $\triangle ABF$ son congruentes.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla España