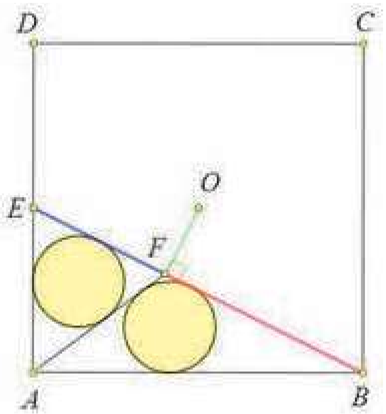
Problema 932. (Suppa, E., 2019) En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado, $AE = DE$ y $OF \perp EB$:



Probar que:

① $EF + FO = FB$

② Los incírculos de los triángulos AFE y ABF son congruentes.

Solución:

① Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el lado del cuadrado $ABCD$ tiene longitud unidad, por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo EAB, resulta que:

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Además, como los triángulos EAB y OFE son semejantes, entonces:

$$\begin{cases} OF = \dfrac{AE \cdot OE}{BE} = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \\ FE = \dfrac{AB \cdot OE}{BE} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} OF + FE = \dfrac{\sqrt{5}}{10} + \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} \\ FB = BE - FE = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} \end{cases} \Rightarrow EF + FO = FB$$

② Si llamamos M al punto medio del segmento EF, como:

$$\left\{\begin{array}{l} EM = \dfrac{FE}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{10} = OF \\ AE = \dfrac{1}{2} = EO \end{array}\right. \underset{\text{Th. Pitágoras}}{\Rightarrow} AM = FE$$

entonces, los triángulos EFO y AME son idénticos. Además, como $EM = FM$, entonces, los triángulos AME y AMF también son idénticos, ya que tienen los dos catetos de igual longitud, por lo que:

$$AF = AE = \frac{1}{2}$$

Finalmente, como los inradios de los triángulos AFE y ABF son:

$$\left\{\begin{array}{l} r_{AFE} = \sqrt{\dfrac{(-AE+AF+FE)(AE-AF+FE)(AE+AF-FE)}{AE+AF+FE}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{10} \\ r_{ABF} = \sqrt{\dfrac{(-AB+AF+FB)(AB-AF+FB)(AB+AF-FB)}{AB+AF+FB}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$$

entonces, los incírculos de los triángulos AFE y ABF son congruentes.