

Siga ABCD el quadrat de centre O.
 Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$
 Siga F en el segment $\overline{BE}$ tal que $\overline{OF}$ és perpendicular a $\overline{BE}$.

Proveu que

- $\overline{EF} + \overline{FO} = \overline{FB}$
- Les circumferències inscrites als triangles $\triangle AFE$, $\triangle ABF$ són iguals.

Proposat per Ercole Suppa

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat ABCD.

$\overline{EO}$ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.

Siga F' la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABE$:

$$\overline{BE} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Els triangles $\triangle ABE$, $\triangle FEO$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\overline{OF}}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Aleshores,

$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{5}c, \overline{OF} = \frac{\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{BF} = \overline{BE} - \overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c - \frac{\sqrt{5}}{5}c = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Els triangles $\triangle ABE$, $\triangle F'FE$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FF'}}{c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{2}{5}, \frac{\overline{EF'}}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{2}{5}$$

Aleshores,

$$\overline{FF'} = \frac{2}{5}c, \overline{EF'} = \frac{1}{5}c$$

$$\overline{AF'} = \overline{BE} - \overline{EF'} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AFF'$:

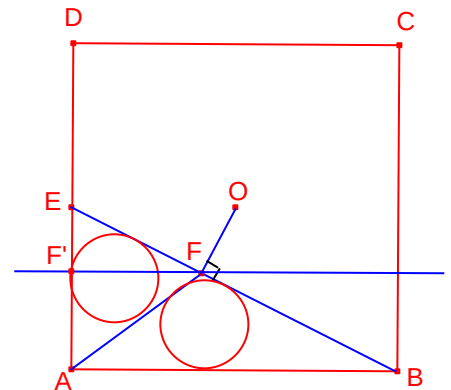
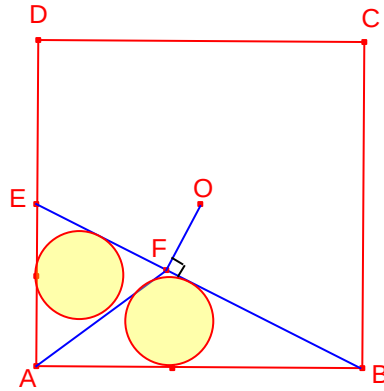
$$\overline{AF} = \frac{1}{2}c$$

a)

$$\overline{EF} + \overline{FO} = \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{\sqrt{5}}{10}c = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{FB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Aleshores, $\overline{EF} + \overline{FO} = \overline{FB}$



b)

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle AFE$

L'àrea del triangle $\triangle AFE$ és:

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{FF'} = \frac{1}{2} (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{AF})r$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{5}c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{1}{2}c \right)r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}c$$

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABF$

L'àrea del triangle $\triangle ABF$ és:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF'} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AF})s$$

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{3}{10}c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{3\sqrt{5}}{10}c + \frac{1}{2}c \right)s$$

$$s = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}c$$

Els dos radis de les circumferències inscrites són iguals.