

★ $ABCD$ square with center O

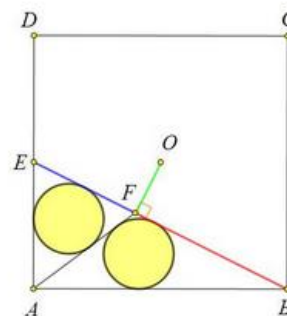
★ $AE = ED$

★ $OF \perp EB$

Prove that:

◆ $EF + FO = FB$

◆ the incircles of $\triangle AFE$ and $\triangle ABF$ are congruent



Propuesto por Ercole Suppa

Solución de Ricard Peiró:

Sea $\overline{AB} = c$, lado del cuadrado $ABCD$.

$\overline{EO}$ es paralelo al lado $\overline{AB}$.

Sea F' la proyección de F sobre el lado $\overline{AD}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle ABE$:

$$\overline{BE} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Los triángulos $\triangle ABE, \triangle FEO$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\overline{OF}}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Entonces,

$$\overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{5}c, \overline{OF} = \frac{\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{BF} = \overline{BE} - \overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c - \frac{\sqrt{5}}{5}c = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Los triángulos $\triangle ABE, \triangle F'FE$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FF'}}{c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{2}{5}, \frac{\overline{EF'}}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} = \frac{2}{5}$$

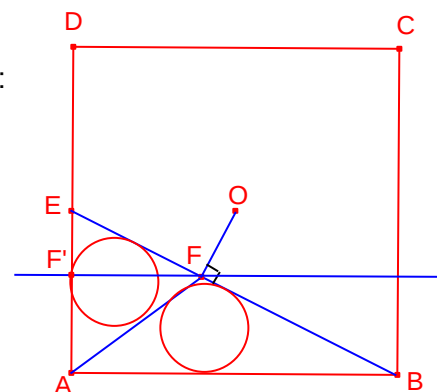
Entonces,

$$\overline{FF'} = \frac{2}{5}c, \overline{EF'} = \frac{1}{5}c$$

$$\overline{AF'} = \overline{BE} - \overline{EF'} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle AFF'$:

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}c$$



a)

$$\overline{EF} + \overline{FO} = \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{\sqrt{5}}{10}c = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{FB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Entonces, $\overline{EF} + \overline{FO} = \overline{FB}$

b)

Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle AFE$

El área del triángulo $\triangle AFE$ es:

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{FF'} = \frac{1}{2} (\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{AF})r$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{5}c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{1}{2}c \right) r$$

Resolviendo la ecuación:

$$r = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}c$$

Sea s el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABF$

El área del triángulo $\triangle ABF$ es:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF'} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AF})s$$

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{3}{10}c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{3\sqrt{5}}{10}c + \frac{1}{2}c \right) s$$

$$s = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}c$$

Los dos radios de las circunferencias inscritas son iguales.