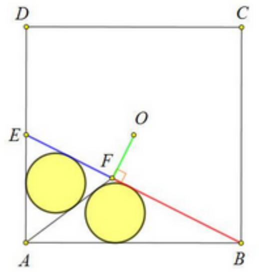
Problema 932

- $ABCD$ square with center O
- $AE = ED$
- $OF \perp EB$

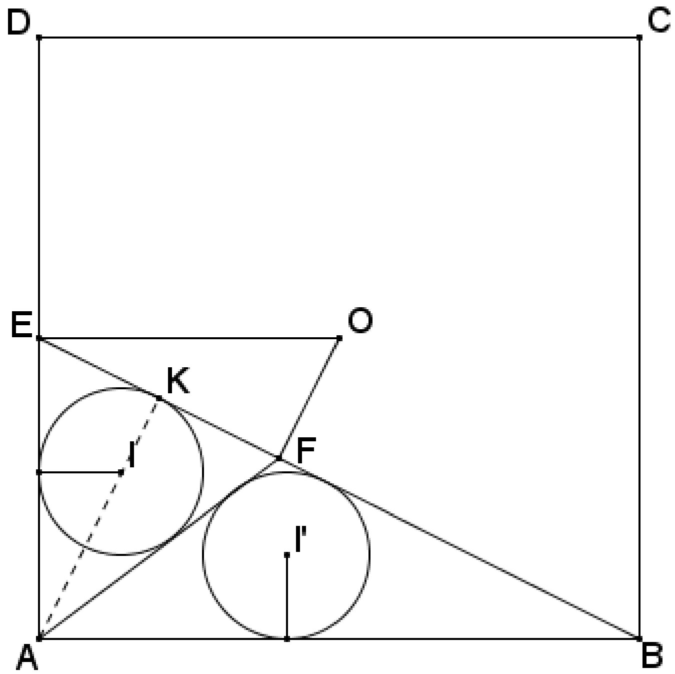


Prove that:

- $EF + FO = FB$
- the incircles of $\triangle AFE$ and $\triangle ABF$ are congruent

Suppa E. (communicacion personal)

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Q_1 On pose sans perte de généralité AB = AD = 2. D'où AE= 1 et EB = $\sqrt{5}$.

Le triangle rectangle OEF est semblable au triangle rectangle ABE. D'où OE= 1, FO = $1/\sqrt{5}$, EF = $2/\sqrt{5}$.

Il en résulte FB = EB – EF = $\sqrt{5} - 2/\sqrt{5} = 3/\sqrt{5}$ = EF + FO.

Q_2 Le point A se projette en K sur BE. Les triangles AEK et OEF qui ont même hypoténuse et les trois angles égaux sont isométriques. D'où EK = FO = $1/\sqrt{5}$. Le point K est donc le milieu du segment EF. Le triangle AEF est isocèle de sommet A et AF = AE = 1.

D'où aire du triangle AEF = AK*FE/2 = 2/5 et aire du triangle ABF = aire du triangle ABE – aire du triangle AEF = 3/5.

Soient r et r' les rayons des cercles inscrits dans les triangles AEF et ABF.

On a r = 2aire AEF/(AE + AF + EF) = $4/5 / (1 + 1 + 2/\sqrt{5}) = 2/(5 + \sqrt{5})$.

Par ailleurs r' = 2aire ABF/(AB + BF + FA) = $6/5 / (2 + 3/\sqrt{5} + 1) = 2/(5 + \sqrt{5})$

On obtient r = r'.