

Problema 932.-

$ABCD$ es un cuadrado con centro en O .

$$AE = ED$$

$$OF \perp EB$$

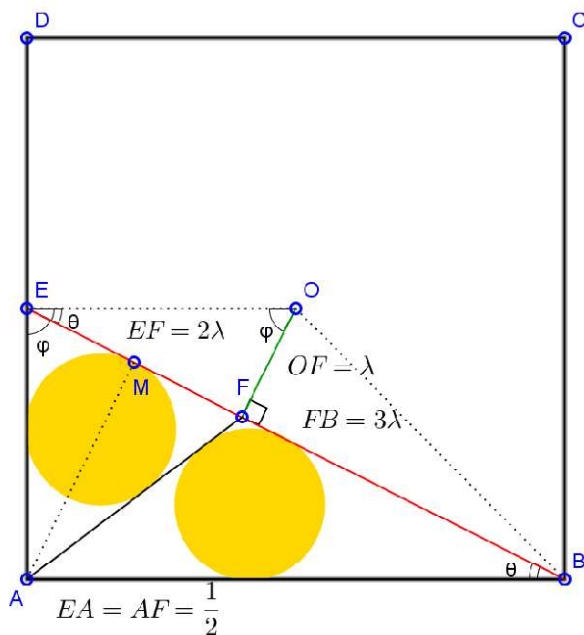
Demostrar que

a) $EF + FO = FB$

b) Los incírculos de $\triangle AFE$ y $\triangle AFB$ son congruentes.

Suppa, E. (2019) comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



a) $EF + FO = FB$

Supongamos un cuadrado de lado unidad.

Por el teorema de Pitágoras en $\triangle EAB$,
 $EB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Los triángulos rectángulos $\triangle EBA$ y $\triangle OEF$ son semejantes ($\angle EBA = \angle OEF$ por alternos internos), luego si $OF = \lambda$, $EF = 2\lambda$ y aplicando el teorema de Pitágoras, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $EB = 5\lambda$ y $FB = 3\lambda$.

Con estos datos $EF + FO = FB$.

Veamos ahora que el triángulo AEF es isósceles.

Sea M el punto medio de EF ; los triángulos EFO y AME son congruentes, ya que $\angle EOF = \angle MEA$, $EM = OF$ y $EA = OE$, por tanto $\triangle AME$ es rectángulo en M y AM es la altura (y mediana) desde A sobre EF , o sea, $AF = EA = \frac{1}{2}$.

b) Los incírculos de $\triangle AFE$ y $\triangle AFB$ son congruentes.

Tomando el segmento FA , común a los triángulos, podemos ver que la razón de sus áreas es la razón de los lados FB y EF , esto es, de $[AFB] = \frac{1}{2} FA \cdot FB \cdot \sin(\angle AFB)$ se sigue

$$\frac{[AFB]}{[AFE]} = \frac{FB}{FE} = \frac{3}{2}$$

Por otra parte la razón de los perímetros correspondientes es

$$\frac{\text{Perím}[AFB]}{\text{Perím}[AFE]} = \frac{3/2(1 + 2\lambda)}{(1 + 2\lambda)} = \frac{3}{2}$$

Como el área de un triángulo puede calcularse con el semiperímetro y el radio del círculo inscrito de la igualdad de esas razones se deduce la igualdad de estos radios. ■