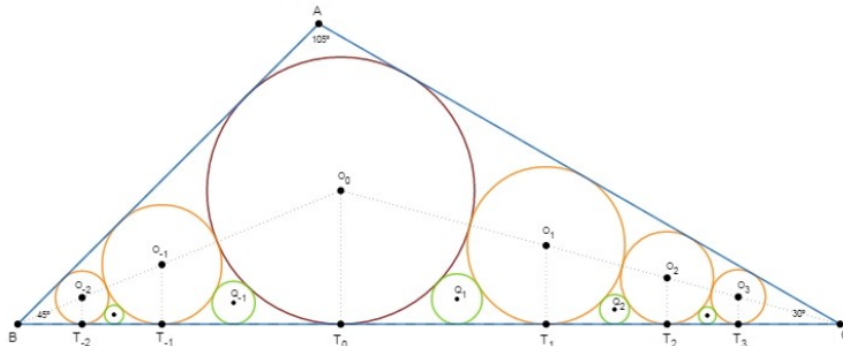


Problema Miguel Angel Pérez García Ortega

Ejercicio 2505. Dado un triángulo ABC con inradio r_0 y tal que:

$$\begin{cases} \angle CBA = \frac{\pi}{4} \\ \angle ACB = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

se consideran las sucesiones de circunferencias $((O_n))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $((O_{-n}))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $((Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ y $((Q_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ que se muestran en la siguiente figura:



donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

- ① La circunferencia (O_n) es tangente a la circunferencia (O_{n-1}) y a las rectas CB y CA .
- ② La circunferencia (O_{-n}) es tangente a la circunferencia $(O_{-(n-1)})$ y a las rectas BA y BC .
- ③ La circunferencia (Q_n) es tangente a las circunferencias (O_{n-1}) y (O_n) y a la recta BC .
- ④ La circunferencia (Q_{-n}) es tangente a las circunferencias $(O_{-(n-1)})$ y (O_{-n}) y a la recta BC .

Calcular, en función de r_0 , el término general de la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ de radios de la sucesión de circunferencias $((Q_n))_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

Solución

Se puede demostrar que si denominamos $BC = a$ entonces los lados del $\triangle ABC$ son $AB = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$, $AC = a(\sqrt{3}-1)$

Su semiperímetro $s = \frac{1}{2} \left(\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} + a(\sqrt{3}-1) + a \right) = \frac{1}{4}a(2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6})$

Su altura relativa al vértice B es $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ y su superficie $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}$

Por todo ello, el radio r_0 de su incírculo es $r_0 = \frac{\frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}}{\frac{1}{4}a(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{6} + \frac{5}{4}\sqrt{2} \right) a$

De momento este dato no lo voy a utilizar ; puesto que lo que me piden es expresar los radios de los círculos (Q_1) , (Q_{-1}) , (Q_2) , (Q_{-2}) en función de r_0

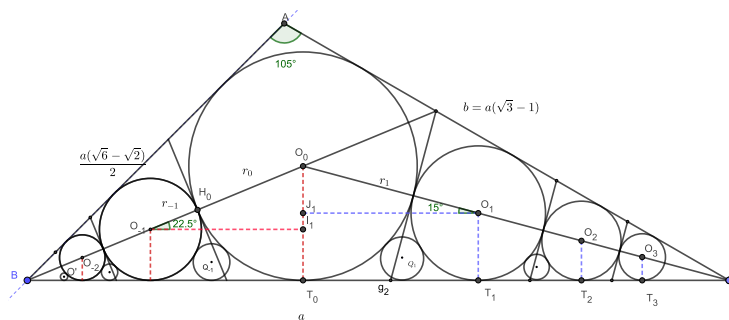


Figura 3

- Vamos a empezar por calcular los radios $r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}, \dots$ de los círculos respectivos $(O_{-1}), (O_{-2}), (O_{-3}), \dots$ situados a la izquierda de O_0

Si nos fijamos en el gráfico el $\triangle O_0 O_{-1} I_1$ rectángulo en I_1 tenemos $O_0 O_{-1} = r_{-1} + r_0$, $O_0 I_1 = r_0 - r_{-1}$

Por Pitágoras $O_{-1}I_1 = 2\sqrt{r_0r_{-1}}$ y como $\text{ang}(I_1O_{-1}O_0)$ es $22,5^\circ$ ($\frac{\pi}{8}$). En virtud del lema 1 (Ver apéndice) tenemos

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 = \frac{r_0 - r_{-1}}{2\sqrt{r_0r_{-1}}} \text{ Resolviendo la ecuación } (r_{-1} < r_0)$$

$$r_{-1} = r_0 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)$$

Es digno de resaltar que la proporción entre los radios es

$$\frac{r_{-1}}{r_0} = \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)$$

Consideramos la homotecia, h , de centro B y factor de escala $\frac{r_{-1}}{r_0}$

Si aplicamos dicha homotecia al círculo (O_0) obtenemos (O_{-1}) . Si se la aplicamos a (O_{-1}) obtenemos (O_{-2}) y así sucesivamente; por lo que la sucesión de los radios es:

$$\begin{aligned} r_0 \\ r_{-1} &= r_0 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right) \\ r_{-2} &= r_0 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^2 \\ &\dots \\ r_{-n} &= r_0 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^n \end{aligned}$$

Vamos ahora a considerar los círculos (O_0) , (O_{-1}) y (Q_{-1}) de manera que (Q_{-1}) sea tangente a los otros círculos exteriormente e interiormente a la recta BC .

Podemos expresar su radio s_{-1} en función de los radios r_0 y r_{-1} de los círculos respectivos (O_0) y (O_{-1}) en virtud del lema 2 (Ver apéndice).

Por ello

$$s_{-1} = \frac{r_0r_{-1}}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_{-1}})^2} = \frac{r_0^2 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)}{\left(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_0 \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)} \right)^2} = r_0 \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right)$$

Si aplicamos la homotecia h anterior al círculo (Q_{-1}) obtendremos Q_{-2} . Si se la aplicamos a (Q_{-2}) obtenemos (Q_{-3}) y así sucesivamente por lo que la sucesión de los radios es:

$$\begin{aligned} s_{-1} &= r_0 \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right) \\ s_{-2} &= \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right) \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right) r_0 \\ s_{-3} &= \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right) r_0 \\ &\dots \\ s_{-n} &= \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^{n-1} \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right) r_0 \end{aligned}$$

- Vamos ahora a calcular los radios $r_1, r_2, r_3, \dots$ de los círculos respectivos $(O_1), (O_2), (O_3), \dots$ situados a la derecha de O_0

Si nos fijamos en el gráfico el $\triangle O_0O_1J_1$ rectángulo en J_1 tenemos $O_0O_1 = r_1 + r_0$, $O_0J_1 = r_0 - r_1$

Por Pitágoras $O_1J_1 = 2\sqrt{r_0r_1}$ y como $\text{ang}(I_1O_1O_0)$ es 15° ($\frac{\pi}{12}$). En virtud del lema 1 tenemos

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} = \frac{r_0 - r_1}{2\sqrt{r_0r_1}} \text{ Resolviendo la ecuación } (r_1 < r_0)$$

$$r_1 = r_0 \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)$$

Es digno de resaltar que la proporción entre los radios es

$$\frac{r_1}{r_0} = \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)$$

Consideramos la homotecia, h' , de centro C y factor de escala $\frac{r_1}{r_0}$

Si aplicamos dicha homotecia al círculo (O_0) obtenemos (O_1) . Si se la aplicamos a (O_1) obtenemos (O_2) y así sucesivamente; por lo que la sucesión de los radios es:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right) \\ r_2 &= r_0 \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^2 \\ r_3 &= r_0 \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^3 \\ &\dots \\ r_{-n} &= r_0 \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^n \end{aligned}$$

Vamos ahora a considerar los círculos (O_0) , (O_1) y (Q_1) de manera que Q_1 sea tangente a los otros círculos exteriormente e interiormente a la recta BC :

Podemos expresar su radio s_1 en función de los radios r_0 y r_1 de los círculos respectivos (O_0) y (O_1) en virtud del lema 2. Por ello

$$s_1 = \frac{r_0 r_1}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1})^2} = \frac{r_0^2 (10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15)}{\left(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_0 (10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15)} \right)^2} = r_0 \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right)$$

Si aplicamos la homotecia h' anterior al círculo (Q_1) obtendremos Q_2 . Si se la aplicamos a (Q_2) obtenemos (Q_3) y así sucesivamente por lo que la sucesión de los radios es:

$$\begin{aligned} s_1 &= r_0 \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right) \\ s_2 &= \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right) \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right) r_0 \\ s_3 &= \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^2 \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right) r_0 \\ &\dots \\ s_n &= \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^{n-1} \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right) r_0 \end{aligned}$$

Por todo lo anterior vamos a definir la sucesión de los radios s_n siendo $n \in \mathbb{Z}$

$$s_n = \begin{cases} \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^{-n-1} \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 7\sqrt{10 - 7\sqrt{2}} - 5\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \right) r_0 & \text{si } n \in \mathbb{Z}^- \sim \{0\} \\ r_0 & \text{si } n = 0 \\ \left(10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 15 \right)^{n-1} \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 5 \right) r_0 & \text{si } n \in \mathbb{Z}^+ \sim \{0\} \end{cases}$$

1. Apéndice

Lema1 Dadas dos circunferencias tangentes entre sí de centros O_0, O_1 y radios r_0 y r_1 respectivamente y sea B el centro de similitud externa de ambas circunferencias .Si conocemos el ángulo formado por la recta BO_0 con una de las rectas tangentes a ambas circunferencias entonces se verifica que

$$\tan \alpha = \frac{|r_1 - r_0|}{2\sqrt{r_1 r_0}}$$

Demostración

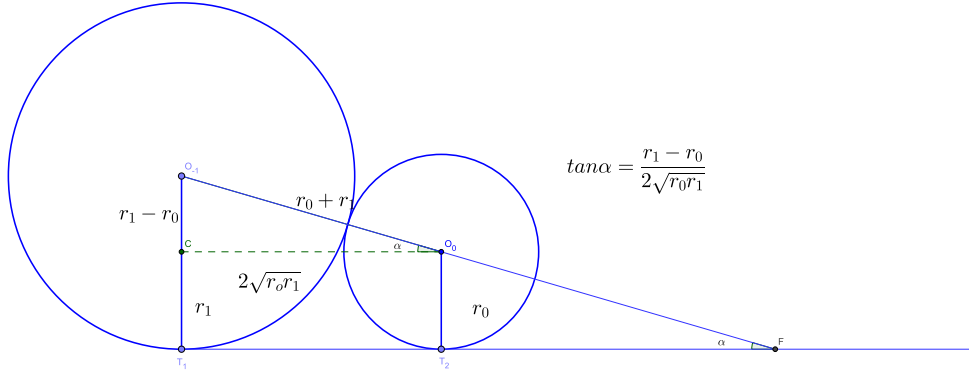


Figura 1

Lema 2 Si se tienen dos circunferencias tangentes de radios r_0 y r_1 y una recta tangente BC exterior a ambas, se puede trazar otra circunferencia de radio r_2 tangente a las circunferencias anteriores e inscrita en el triángulo formado por éstas y la recta BC .El radio de dicha circunferencia es

$$r_2 = \frac{r_0 r_1}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1})^2}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \triangle O_0 O_1 C : \overline{CO_0} &= \overline{T_1 T_2} = \sqrt{(r_0 + r_1)^2 - (r_0 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_0 r_1} \\ \triangle O_1 Q_{-1} A : \overline{AQ_{-1}} &= \overline{T_1 T_3} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2} \\ \triangle O_0 Q_{-1} B : \overline{Q_{-1} B} &= \overline{T_3 T_2} = \sqrt{(r_0 + r_2)^2 - (r_0 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_0 r_2} \end{aligned} \Rightarrow \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_0} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_0}}$$

$$r_2 = \frac{r_1 r_0}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_0})^2}$$

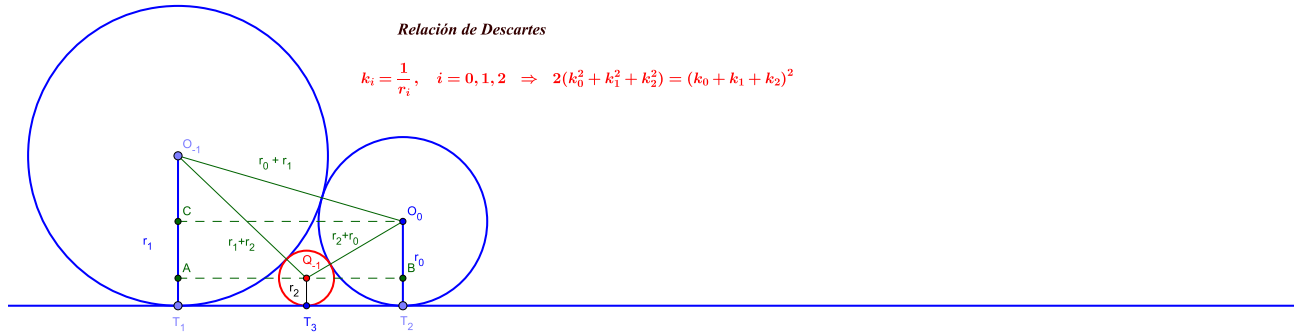


Figura 2