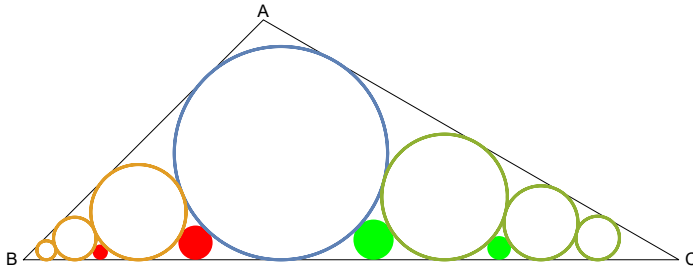


Pr. Cabri 933

Enunciado

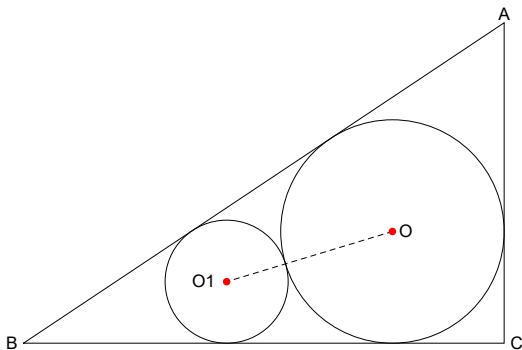


Calcular en función de r_0 (radio del incírculo de ABC) el término general de la sucesión (s_n) , $n \in \mathbb{Z}^*$, de los radios de las circunferencias (Q_n) , $n \in \mathbb{Z}^*$, es decir las rojas $(-n)$ y verdes (n) , sabiendo que los ángulos en B y C miden 45° y 30° , respectivamente.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco



Primero resolveremos el problema de calcular la razón de homotecia que transforma O en O1 en función del ángulo (entre 0° y 90°) que forman sus tangentes. Tomando $A(1,a)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$, tenemos que $\text{tg}B=a$.

El círculo O (incírculo) tiene como centro $O(p,q) = \left(\frac{1}{2} (1 - a + \sqrt{1 + a^2}), \frac{a}{1 + a + \sqrt{1 + a^2}} \right)$

siendo la ordenada igual al radio R.

Si el centro de O1 es (x,r) , sus coordenadas son proporcionales a las de O, así que lo podemos calcular resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = \frac{p}{q} \\ |O - O1| = R + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a} \\ a^2 + 2 \left(1 + \sqrt{1 + a^2} \right) (-1 + x)^2 - a \left(1 + \sqrt{1 + a^2} + 8r - 2x^2 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Obtenemos } r = \frac{a \left(-1 + 3\sqrt{1 + a^2} - 2\sqrt{2} \sqrt{1 + a^2 - \sqrt{1 + a^2}} \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + a^2} \right) \left(1 + a + \sqrt{1 + a^2} \right)}$$

De donde deducimos que la razón de homotecia será

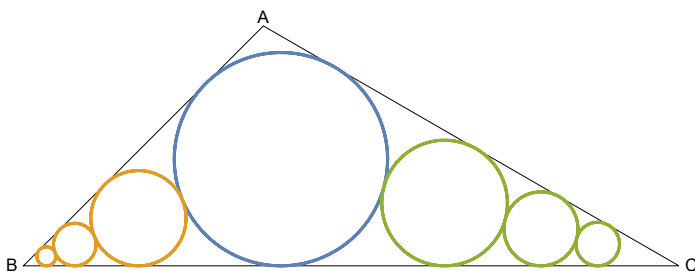
$$k = \frac{r}{R} = \frac{-1+3\sqrt{1+a^2} - 2\sqrt{2}\sqrt{1+a^2-\sqrt{1+a^2}}}{1+\sqrt{1+a^2}} \quad \text{y haciendo el cambio } a = \text{Tg}(t) \text{ obtenemos}$$

$k = \text{Tan}\left[\frac{\pi-t}{4}\right]^2$ que solo depende del ángulo.

En nuestro problema para $B=45^\circ$, $k(45) = 7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} = \text{Tg}^2\left(\frac{3\pi}{16}\right)$

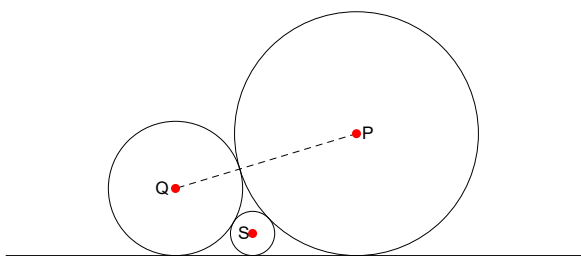
y para $c=30^\circ$, $k(30) = 15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} = \text{Tg}^2\left(\frac{5\pi}{24}\right)$.

Usando estas homotecias estamos en condiciones de dibujar toda una serie de circunferencias tangentes.



Los sucesivos círculos tangentes intercalados entre estas circunferencias y el lado BC (los Q_n del problema) tienen las mismas razones de homotecia, es decir, la razón de homotecia entre Q_{n-1} y Q_n es la ya calculada.

Para obtener sus radios veremos como se relaciona el radio de uno de ellos (digamos Q_1) con los radios de los dos con los que es tangente (O y O_1 , en este caso). Veamos el siguiente dibujo



Hay un “sangaku” de la prefectura de Gumma, datado en 1824, donde se pregunta por la relación entre los radios de las 3 circunferencias tangentes del dibujo. No es difícil demostrar que, si los radios miden p , q , s , se cumple que $s = \frac{pq}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$. También se

puede expresar como $\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$.

Volviendo al problema, si el inradio es r_0 , el primer círculo tangente tiene radio kr_0 y Q_1 , usando la relación anterior, tiene radio $s_1 = \frac{r_0 k r_0}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{k r_0})^2} = \frac{k r_0}{(1 + \sqrt{k})^2}$, donde k es la

razón de homotecia anteriormente calculada.

Los sucesivos radios serían $s_n = \frac{k^n r_0}{(1 + \sqrt{k})^2}$.

En nuestro caso tenemos dos sucesiones, con constantes respectivas $k(30)$ y $k(45)$ calculadas anteriormente.

Apéndice

Ya hemos visto el papel fundamental de k . Si el ángulo es mayor que 90° una modificación de los cálculos (considerando el triángulo $A(-1,a)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$) permite

obtener la constante $k' = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + a^2}\right) \left(1 + 3\sqrt{1 + a^2} - 2\sqrt{2}\sqrt{1 + a^2 + \sqrt{1 + a^2}}\right)}{a^2}$ que haciendo el cambio $a = \tan(t)$ se obtiene $k' = \tan\left[\frac{t}{4}\right]^2$.

Si el ángulo es de 90° ($a \rightarrow \infty$), ambas constantes proporcionan el valor $3 - 2\sqrt{2}$.

