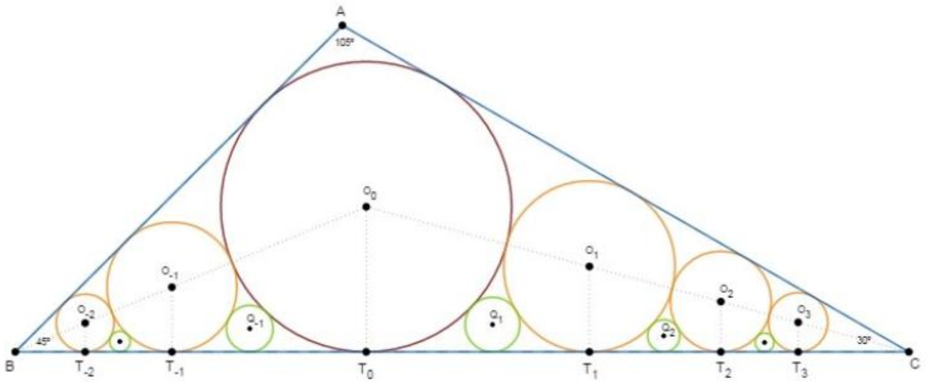
Problema 933.-

Ejercicio 2505. Dado un triángulo ABC con inradio r_0 y tal que:

$$\begin{cases} \measuredangle CBA = \frac{\pi}{4} \\ \measuredangle ACB = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

se consideran las sucesiones de circunferencias $((O_n))_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$, $((O_{-n}))_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}}$, $((Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $((Q_{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$ que se muestran en la siguiente figura:



donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

① La circunferencia (O_n) es tangente a la circunferencia (O_{n-1}) y a las rectas CB y CA.

② La circunferencia (O_{-n}) es tangente a la circunferencia $(O_{-(n-1)})$ y a las rectas BA y BC.

③ La circunferencia (Q_n) es tangente a las circunferencias (O_{n-1}) y (O_n) y a la recta BC.

④ La circunferencia (Q_{-n}) es tangente a las circunferencias $(O_{-(n-1)})$ y (O_{-n}) y a la recta BC.

Calcular, en función de r_0, el término general de la sucesión $(s_n)_{n\in Z^*}$ de radios de la sucesión de circunferencias$((Q_n))_{n\in Z^*}$.

Suppa, E. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea el triángulo ABC de lados $AB = \sqrt{2}, BC = 1 + \sqrt{3}, AC = 2$. Por tanto, su semiperímetro es $p = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$. Así el valor del área del ΔABC es igual a

$[ABC] = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\ \right) = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot r_0$; Resulta así que: $r_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

Determinaremos ahora el valor del radio r_{-1}.

La homotecia de centro el punto B y de razón k_1 transforma la circunferencia $(O_0)\ en\ (O_{-1})$ y así, sucesivamente, $(O_{-1})\ en\ (O_{-2}), \dots, \left(O_{-(n-1)}\right)\ en\ (O_{-n})$.

En el triángulo rectángulo BT_0O_O, la longitud del segmento $O_0B = \sqrt{r_0^2 + (p-b)^2}$;

$O_0B = \sqrt{8 - 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}$.

Por tanto, la razón k_1 viene dada por: $k_1 = \frac{O_0F'}{O_0F} = \frac{O_0B - r_0}{O_0B + r_0} = \frac{\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}} - \frac{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}} + \frac{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

$$\mathrm{k}_1 = \frac{-3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}}{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}} \cong 0.44646$$

De esta forma, $r_{-1} = k_1 r_0$.

Para determinar el valor s_{-1} del radio de la circunferencia (Q_{-1}), consideramos las siguientes relaciones entre los radios $r_0, r_1\ y\ s_{-1}$.

$(r_1+s_{-1})^2-(r_1-s_{-1})^2=m_1^2 \rightarrow 4s_{-1}r_1=m_1^2;$

$(r_0+s_{-1})^2-(r_0-s_{-1})^2=m_2^2 \rightarrow 4s_{-1}r_0=m_2^2;$

$(r_1+r_0)^2-(r_1-r_0)^2=(m_1+m_2)^2 \rightarrow 4r_1r_0\ =(m_1+m_2)^2;$

En definitiva, $\left(2\sqrt{s_{-1}r_1}+2\sqrt{s_{-1}r_0}\right)^2=4r_1r_0 \rightarrow s_{-1}=\frac{r_1r_0}{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_0}\right)^2}$

Y en general, con la homotecia de polo el punto B y de razón $k_1=\frac{-3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}}{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{8-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}}$

podemos determinar los radios de las circunferencias (Q_{-n}), del modo: $\mathbf{s_{-n}=\frac{r_0k_1^n}{\left(1+\sqrt{k_1}\right)^2}}$

Procediendo de un modo similar para las circunferencias (Q_n), llegaríamos de un modo análogo a calcular los siguientes valores:

En el triángulo rectángulo CT_0O_0, la longitud del segmento $O_0C=\sqrt{r_0^2+(p-c)^2};$

$O_0C=\sqrt{10-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}.\ \ r_0=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

Determinaremos ahora el valor del radio r_1.

La homotecia de centro el punto C y de razón k_2 transforma la circunferencia $(O_0)\ en\ (O_1)$ y así, sucesivamente, $(O_1)\ en\ (O_2), \dots, (O_{n-1})\ en\ (O_n)$. La razón k_2 viene dada por:

$k_2=\frac{O_0G'}{O_0G}=\frac{O_0C-r_0}{O_0C+r_0}=\frac{-3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{10-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{10-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}\cong 0.58879.$ De esta forma, $r_1=k_2r_0$.

Para determinar el valor s_1 del radio de la circunferencia (Q_1), consideramos las siguientes relaciones entre los radios $r_0, r_1\ y\ s_1$.

$(r_1+s_1)^2-(r_1-s_1)^2=m_1^2 \rightarrow 4s_1r_1=m_1^2;\ \ (r_0+s_1)^2-(r_0-s_1)^2=m_2^2 \rightarrow 4s_1r_0=m_2^2;$

$(r_1+r_0)^2-(r_1-r_0)^2=(m_1+m_2)^2 \rightarrow 4r_1r_0\ =(m_1+m_2)^2;$

En definitiva, $\left(2\sqrt{s_1r_1}+2\sqrt{s_1r_0}\right)^2=4r_1r_0 \rightarrow s_1=\frac{r_1r_0}{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_0}\right)^2}$

Con la homotecia de polo el punto C y de razón $k_2=\frac{-3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+2\sqrt{10-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}{3-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{10-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}}$ determinamos los radios de las circunferencias (Q_n), del modo $\mathbf{s_n=\frac{r_0k_2^n}{\left(1+\sqrt{k_2}\right)^2}}$