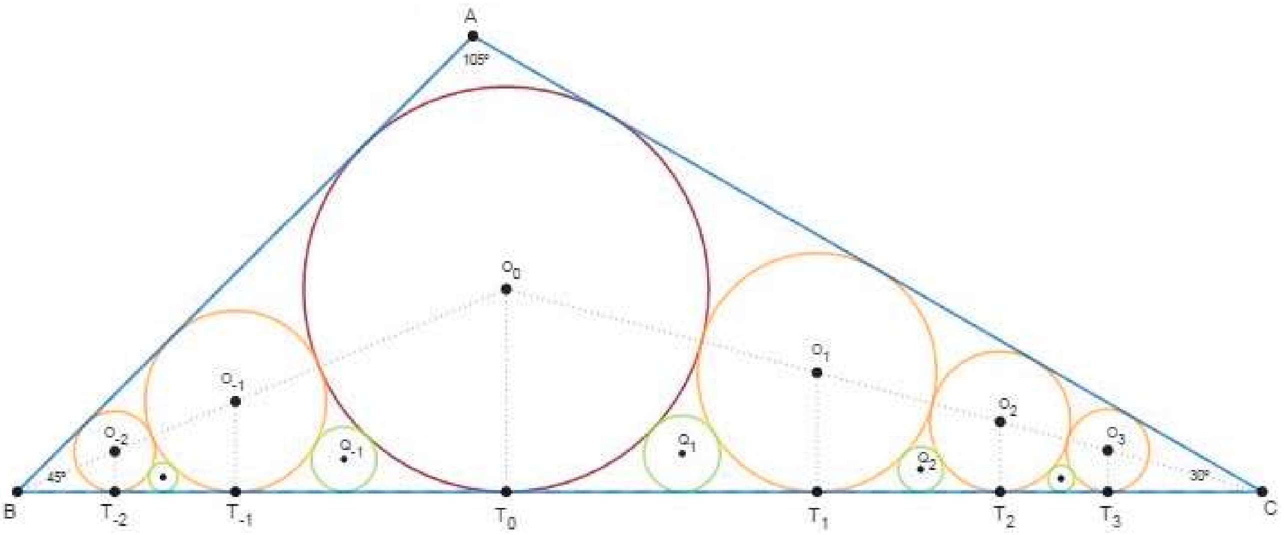
Problema 933. (Pérez García-Ortega, M. A., 2019) Dado un triángulo ABC con inradio r_0 y tal que:

$$\begin{cases} \triangle CBA = \dfrac{\pi}{4} \\ \triangle ACB = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

se consideran las sucesiones de circunferencias $((O_n))_{n\in Z}$ y $((Q_n))_{n\in Z^*}$ que se muestran en la siguiente figura:



Calcular, en función de r_0, el término general de la sucesión $(s_n)_{n\in Z^*}$ de radios de la sucesión de circunferencias $((Q_n))_{n\in Z^*}$.

Solución:

① Utilizando la fórmula obtenida en el Problema 935, resulta que:

$$CT_0 = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1}\right] r_0 = (2+\sqrt{3})r_0$$

y, si llamamos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de radios de la sucesión de circunferencias $((O_n))_{n\in\mathbb{N}}$, como los triángulos O_0T_0C y O_1T_1C son semejantes, entonces, las circunferencias de esta sucesión son homotéticas de razón:

$$k_+ = \frac{r_1}{r_0} = \frac{CT_1}{CT_0} = \frac{CT_0 - 2\sqrt{r_0 r_1}}{CT_0} = 1 - \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{r_1}{r_0}} \Rightarrow k_+ = \frac{r_1}{r_0} = 15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6}$$

Además, utilizando el Teorema de los Círculos de Descartes, se verifica que:

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{s_1}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{s_1^2}\right)$$

por lo que:

$$s_1 = \frac{r_0 r_1}{r_0 + 2\sqrt{r_0 r_1} + r_1} \underset{r_1 = k_+ r_0}{=} \left(\frac{k_+}{1 + 2\sqrt{k_+} + k_+} \right) r_0 = \left(5 - 3\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{6} \right) r_0$$

y, como las circunferencias de la sucesión $((Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ son homotéticas de razón k_+, entonces:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : s_n = s_1 k_+^{n-1} = \left(5 - 3\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{6} \right) (15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6})^{n-1} r_0$$

② Utilizando la fórmula obtenida en el Problema 935, resulta que:

$$CT_0 = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1} \right] r_0 = (1 + \sqrt{2})\, r_0$$

y, si llamamos $(r_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de radios de la sucesión de circunferencias $((O_{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$, como los triángulos O_0BT_0 y $O_{-1}BT_{-1}$ son semejantes, entonces, las circunferencias de esta sucesión son homotéticas de razón:

$$k_- = \frac{r_{-1}}{r_0} = \frac{BT_{-1}}{BT_0} = \frac{BT_0 - 2\sqrt{r_0 r_{-1}}}{BT_0} = 1 - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{r_{-1}}{r_0}} \Rightarrow k_- = \frac{r_{-1}}{r_0} = 7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}$$

Además, utilizando el Teorema de los Círculos de Descartes, se verifica que:

$$\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{-1}} + \frac{1}{s_{-1}} \right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_{-1}^2} + \frac{1}{s_{-1}^2} \right)$$

por lo que:

$$s_{-1} = \frac{r_0 r_{-1}}{r_0 + 2\sqrt{r_0 r_{-1}} + r_{-1}} \underset{r_{-1} = k_- r_0}{=} \left(\frac{k_-}{1 + 2\sqrt{k_-} + k_-} \right) r_0 = \left(\frac{7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}}{10 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{10 - 74\sqrt{2}}} \right) r_0$$

y, como las circunferencias de la sucesión $((Q_{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$ son homotéticas de razón k_-, entonces:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : s_{-n} = s_{-1} k_-^{n-1} = \left(\frac{7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}}}{10 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{10 - 74\sqrt{2}}} \right) \left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^{n-1} r_0$$

Finalmente:

$$\forall\, n \in Z^* : s_n = \begin{cases} \left(5 - 3\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{6} \right) (15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6})^{n-1} r_0 & n \in \mathbb{N} \\ \left[\frac{\left(7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20 - 14\sqrt{2}} \right)^{-n}}{10 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{10 - 74\sqrt{2}}} \right] r_0 & n \in -\mathbb{N} \end{cases}$$