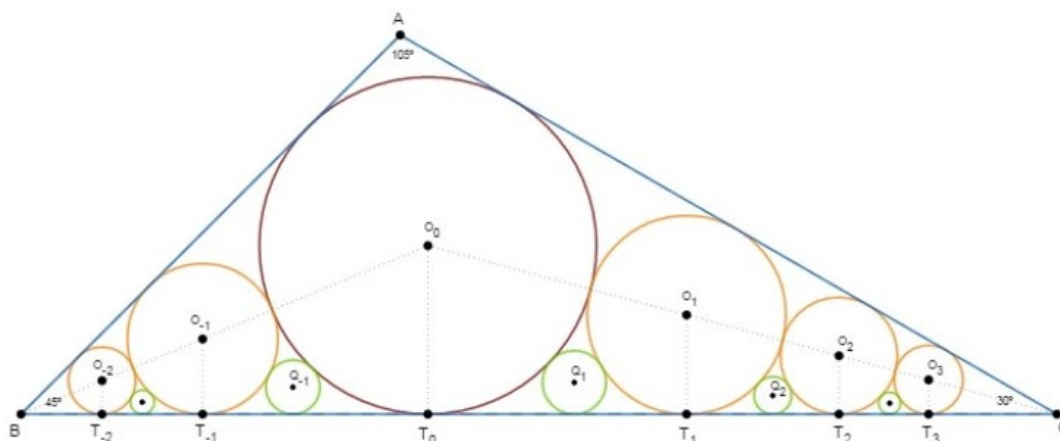


Problema 933

Ejercicio 2505. Dado un triángulo ABC con inradio r_0 y tal que:

$$\begin{cases} \angle CBA = \frac{\pi}{4} \\ \angle ACB = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

se consideran las sucesiones de circunferencias $((O_n))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $((O_{-n}))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $((Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ y $((Q_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$ que se muestran en la siguiente figura:



donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

- ① La circunferencia (O_n) es tangente a la circunferencia (O_{n-1}) y a las rectas CB y CA .
- ② La circunferencia (O_{-n}) es tangente a la circunferencia $(O_{-(n-1)})$ y a las rectas BA y BC .
- ③ La circunferencia (Q_n) es tangente a las circunferencias (O_{n-1}) y (O_n) y a la recta BC .
- ④ La circunferencia (Q_{-n}) es tangente a las circunferencias $(O_{-(n-1)})$ y (O_{-n}) y a la recta BC .

Calcular, en función de r_0 , el término general de la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ de radios de la sucesión de circunferencias $((Q_n))_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

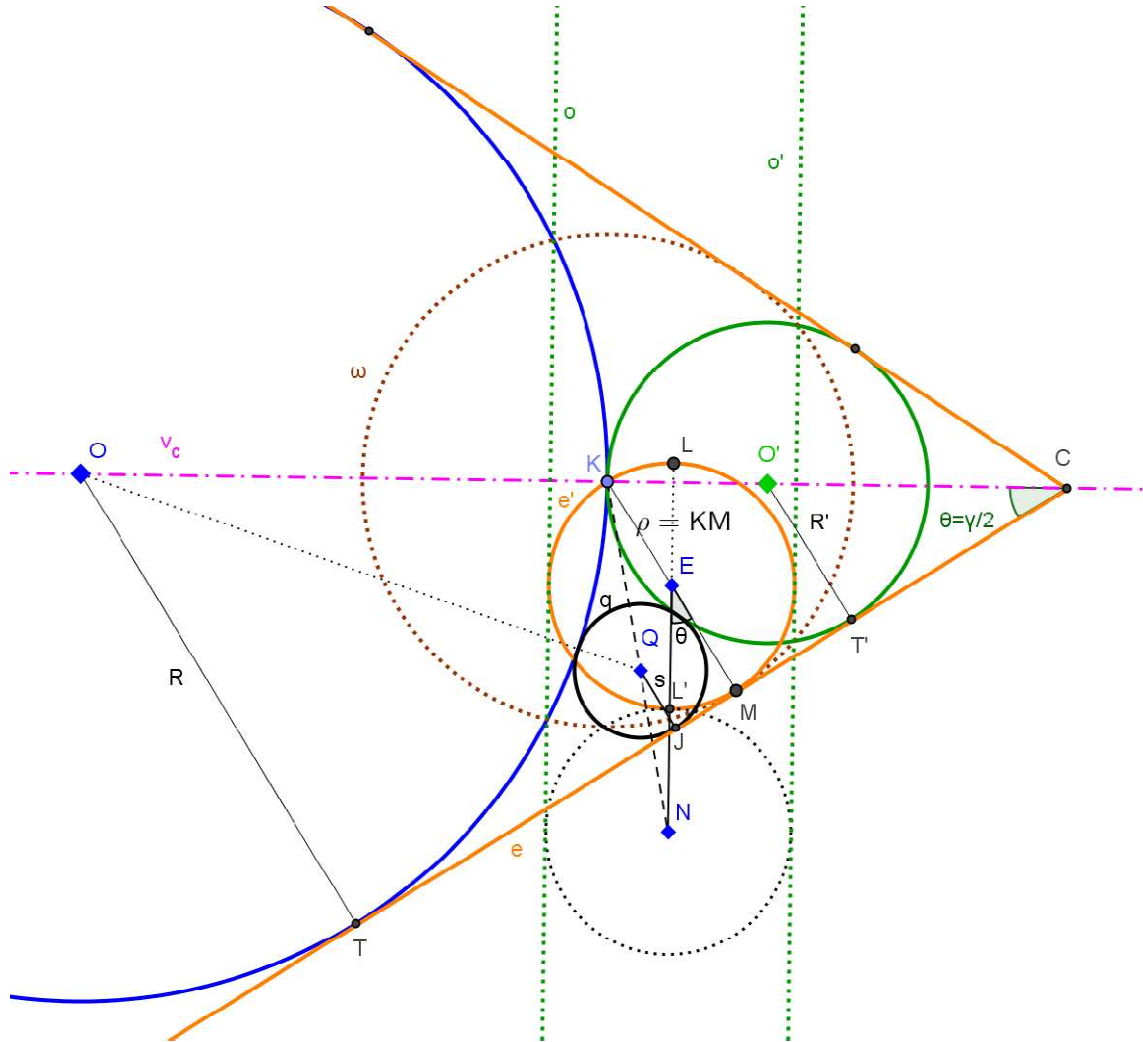
Pérez-García (2019) comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Supongamos que tenemos en un ángulo definido por dos semirrectas con origen en C y dos circunferencias tangentes entre sí y tangentes a los dos lados del ángulo, como las de centro O_i del problema. Queremos construir una circunferencia tangente a esas dos y al lado inferior del ángulo, como las de centro Q_i . Además queremos encontrar la relación que existe entre los radios de estas circunferencias y el ángulo en cuestión.

Si K es el punto de contacto de las dos circunferencias, la inversión con centro en él y radio su distancia a $e = CT$ (el segmento KM) transforma estas circunferencias en dos rectas paralelas entre sí y perpendiculares a la bisectriz de C (recta que une sus centros).

La recta $e = CT$ se transformará en una circunferencia tangente a las rectas transformadas (comprendida entre ellas) y que pasa por el polo de inversión K y por M ; se trata de una circunferencia e' de diámetro KM (centro E , su punto medio), igual al radio de la circunferencia de inversión $\omega = (K; KM)$. Ahora debemos encontrar una circunferencia tangente a estos transformados, es decir, tangente a las dos paralelas y a la circunferencia $e' = (E; \frac{KM}{2})$.



La perpendicular por E a la bisectriz corta a $e' = (E)$ en L y L' .

Estos son los puntos de tangencia de dos circunferencias tangentes a las dos paralelas y a $e' = (E)$. La que nos interesa es la que pasa por L' y tiene centro N (simétrico de E por L').

Su diámetro es igual al radio de la circunferencia de inversión.

Aplicando a (N) la inversión respecto de (K) , obtenemos la circunferencia de centro (Q) .

$$\varphi = \text{Inversión}(\omega(K; \rho = KM))$$

$$\varphi: (O) \rightarrow o = \text{Eje radical} [(O); \omega]$$

$$\varphi: (O') \rightarrow o' = \text{Eje radical} [(O'); \omega]$$

$$\varphi: e \rightarrow e' = (E; \frac{\rho}{2})$$

$$\varphi: \left(N; \frac{\rho}{2}\right) \rightarrow q = (Q; s)$$

Llamando R, R' a los radios de $(O), (O')$ respectivamente, tenemos

$$\text{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{R'}{CO'} = \frac{R}{CO} = \frac{R-R'}{CO-CO'} = \frac{R-R'}{R+R'}$$

De la igualdad entre la primera y la última de estas razones se obtiene

$$\frac{R'}{R} = \frac{1 - \text{sen} \frac{\gamma}{2}}{1 + \text{sen} \frac{\gamma}{2}} \quad (1)$$

Como puede verse esta relación no depende más que del ángulo en que están inscritas, y por tanto es la misma para cualquier par de circunferencias contiguas.

De manera similar para la circunferencia de inversión (K) .

$$\text{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{CO} = \frac{\rho}{CK} = \frac{R-\rho}{R}$$

e igualmente como antes

$$\rho = \left(1 - \text{sen} \frac{\gamma}{2}\right) \cdot R \quad (2)$$

Para la circunferencia menor, la construida mediante inversión y que es tangente a éstas, tenemos que aplicar la siguiente relación:

si dos circunferencia c, c' de radios respectivos r, r' se transforman una en la otra por una inversión de potencia k^2 , respecto de la circunferencia $(W; R)$ se tiene

$$\frac{r'}{r} = \frac{R^2}{|\text{Pot}(W; c)|} \quad (3)$$

(W es el centro de la circunferencia de inversión).

En nuestro caso $W = K$ y c es la circunferencia $\left(N; \frac{\rho}{2}\right)$.

Teniendo en cuenta que $\theta = \angle NEM = \frac{\gamma}{2}$ por tener sus lados perpendiculares y aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle KEN$ tenemos

$$|\text{Pot}(K; (N))| = KN^2 - L'N^2 = \left(\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} + \rho^2 \cdot \cos \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\rho^2}{4} = \rho^2 \left(1 + \cos \frac{\gamma}{2}\right),$$

por tanto, según (3)

$$\frac{s}{\frac{\rho}{2}} = \frac{\rho^2}{\rho^2 \left(1 + \cos \frac{\gamma}{2}\right)}$$

y simplificando (2)

$$s = \frac{1 - \text{sen} \frac{\gamma}{2}}{2 \left(1 + \cos \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot R \quad (4)$$

De la relación (1)

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \frac{r_n}{r_0} = \frac{r_1}{r_0} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}} = \left(\frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^n$$

De (4) se tiene ahora (en el dibujo original no considera el índice 0 para las circunferencias Q_i)

$s_1 = \frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{2(1 + \cos \frac{\gamma}{2})} \cdot r_0$ y, en general, $s_{i+1} = \frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{2(1 + \cos \frac{\gamma}{2})} \cdot r_i$, y por tanto, para dos circunferencias de centros Q_{i+1} y Q_i

$$\frac{s_{i+1}}{s_i} = \frac{r_i}{r_{i-1}} = \frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \quad (5)$$

$$\frac{s_n}{s_1} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_3}{s_2} \cdot \dots \cdot \frac{s_n}{s_{n-1}} = \left(\frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$s_n = \left(\frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{2(1 + \cos \frac{\gamma}{2})} \cdot r_0$$

La relación (5) indica que los puntos (Q_i) están alineados con el vértice C .

Para los radios de las circunferencias inscritas en el ángulo B , se obtiene la expresión análoga, siendo pues

$$s_{-n} = \left(\frac{1 - \sin \frac{\beta}{2}}{1 + \sin \frac{\beta}{2}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \sin \frac{\beta}{2}}{2(1 + \cos \frac{\beta}{2})} \cdot r_0$$

Las expresiones anteriores pueden simplificarse poniendo $\frac{1 - \sin \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin \frac{\gamma}{2}} = \tan^2 \left(\frac{180^\circ - \gamma}{4} \right)$

Particularizando a los valores concretos de los ángulos del triángulo del problema tendremos

$$s_n = \left(\frac{1 - \sin 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} \right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \sin 15^\circ}{2(1 + \cos 15^\circ)} \cdot r_0$$

$$s_{-n} = \left(\frac{1 - \sin 22.5^\circ}{1 + \sin 22.5^\circ} \right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \sin 22.5^\circ}{2(1 + \cos 22.5^\circ)} \cdot r_0$$

■