Problema 934.-

1. ABC $\quad a\ triangle$
2. D $\quad a\ point\ on\ the\ segment\ BC$
3. $1a$ $\quad the\ circle\ passing\ through\ A\ and\ tangent\ to\ BC\ at\ D$
4. Q, R $\quad the\ second\ points\ of\ intersection\ of\ 1a\ wrt\ AB, AC.$

$Prove$: $\ AD^2.BC = AB.AC.QR$

$Aymé, J.L.\ (2019)$: $Comunicación\ personal.$

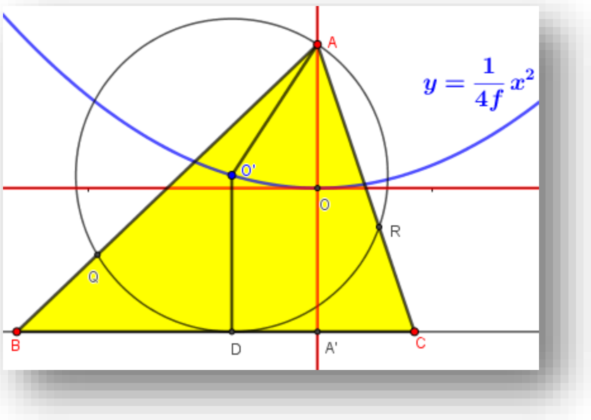
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea A' el pie de la perpendicular del punto A sobre el lado BC y O, el punto medio entre A y O. Queda claro que según el enunciado, el punto O', centro de la circunferencia tangente a BC en el punto D y que pasa por A ha de pertenecer a la parábola de Foco, el punto A y directriz la propia recta BC.

Consideramos en lo que sigue a continuación y como nuevos ejes de coordenadas:

$EjeX$: $Recta\ paralela\ al\ lado\ BC\ por\ el\ punto\ O.$

$EjeY$: $Recta\ perpendicular\ a\ Eje\ X\ por\ el\ punto\ O.$



De esta forma, en este sistema de referencia, los puntos siguientes tendrán como coordenadas:

$A = (0, f)$;

$O' = \left(m, \frac{m^2}{4f}\right)$;

$D = (m, -f)$;

$B = (p, -f)$;

$C = (q, -f)$; $\ (p < q)$.

Así la ecuación de la circunferencia de centro el punto O' y de radio $r = O'D$ será:

$$(x-m)^2 + \left(y - \frac{m^2}{4f}\right)^2 = \left(\frac{m^2+4f^2}{4f}\right)^2$$

Las ecuaciones de las rectas AB y AC serán $\ y = -\frac{2f}{p}x + f$; $y = -\frac{2f}{q}x + f$, respectivamente. Los puntos Q y R, serán los de coordenadas:

$$Q = \left(\frac{p(4f^2 - m^2 + 2mp)}{p^2+4f^2}, \frac{-4f^3 + 2fm^2 - 4fmp + fp^2}{p^2+4f^2}\right)$$

$$R = \left(\frac{q(4f^2 - m^2 + 2mq)}{q^2+4f^2}, \frac{-4f^3 + 2fm^2 - 4fmq + fq^2}{q^2+4f^2}\right)$$

$$De\ este\ modo, QR = \frac{(4f^2+m^2)(q-p)}{\sqrt{(p^2+4f^2)(q^2+4f^2)}}$$

$$\mathrm{AB} = \sqrt{p^2+4f^2};\ \mathrm{AC} = \sqrt{q^2+4f^2}; BC = \mathrm{q} - \mathrm{p}; AD = \sqrt{m^2+4f^2};\quad QR = \frac{(4f^2+m^2)(q-p)}{\sqrt{(p^2+4f^2)(q^2+4f^2)}}.$$

Vemos por fin que, en efecto, se verifica la relación exigida, $AD^2.BC = AB.AC.QR$ ya que:

$$(m^2+4f^2)(q-p) = \sqrt{p^2+4f^2}\cdot\sqrt{q^2+4f^2}\cdot\frac{(4f^2+m^2)(q-p)}{\sqrt{(p^2+4f^2)(q^2+4f^2)}}$$