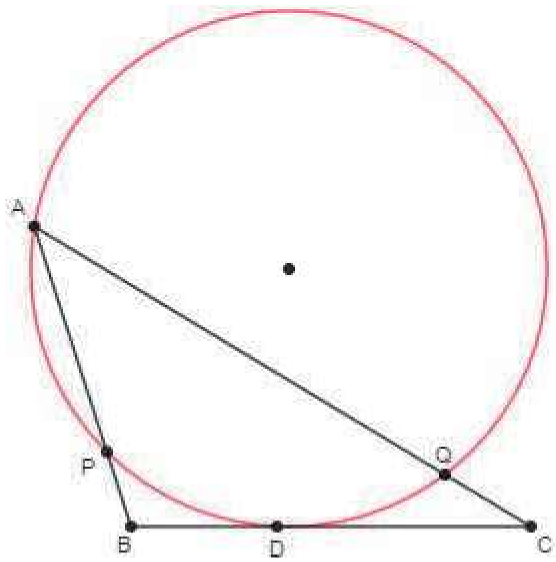
Problema 934. (Aymé, J. L., 2019) Dado un triángulo ABC, se consideran un punto D situado en el segmento BC y la circunferencia que pasa por el punto A y es tangente a la recta BC en el punto D. Si P y Q son los segundos puntos de intersección de dicha circunferencia con las rectas AB y AC, respectivamente, probar que:

$$AD^2 \cdot BC = AB \cdot AC \cdot PQ$$



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $D = (0 : d : 1-d)$ $(0 < d < 1)$, como la ecuación de una circunferencia general que pasa por el punto A es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (vy + wz)(x + y + z) = 0 \ (v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que sea tangente a la recta BC en el punto D, obtenemos que:

$$\begin{cases} v = a^2(1-d)^2 \\ w = a^2d^2 \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la circunferencia considerada es:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - a^2\left[(1-d)^2y + d^2z\right](x + y + z) = 0$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} P = (a^2(1-d)^2 : c^2 - a^2(1-d)^2 : 0) \\ Q = (a^2d^2 : 0 : b^2 - a^2d^2) \end{cases}$$

Finalmente, como:

$$\begin{cases} AD^2 = S_A + S_B d^2 + S_C (1-d)^2 = b^2 - a^2 d - b^2 d + c^2 d + a^2 d^2 \\ PQ^2 = S_A \left[\dfrac{a^2(1-d)^2}{c^2} - \dfrac{a^2 d^2}{b^2} \right]^2 + S_B \left[\dfrac{c^2 - a^2(1-d)^2}{c^2} \right]^2 + S_C \left(\dfrac{b^2 - a^2 d^2}{b^2} \right)^2 = \dfrac{a^2 [b^2 - a^2 d - b^2 d + c^2 d + a^2 d^2]^2}{b^2 c^2} \end{cases}$$

entonces:

$$[b^2 - a^2 d - b^2 d + c^2 d + a^2 d^2]^2 a^2 = b^2 c^2 PQ^2$$

$$AD^4 \cdot BC^2 = AC^2 \cdot AB^2 \cdot PQ^2$$

$$AD^2 \cdot BC = AB \cdot AC \cdot PQ$$