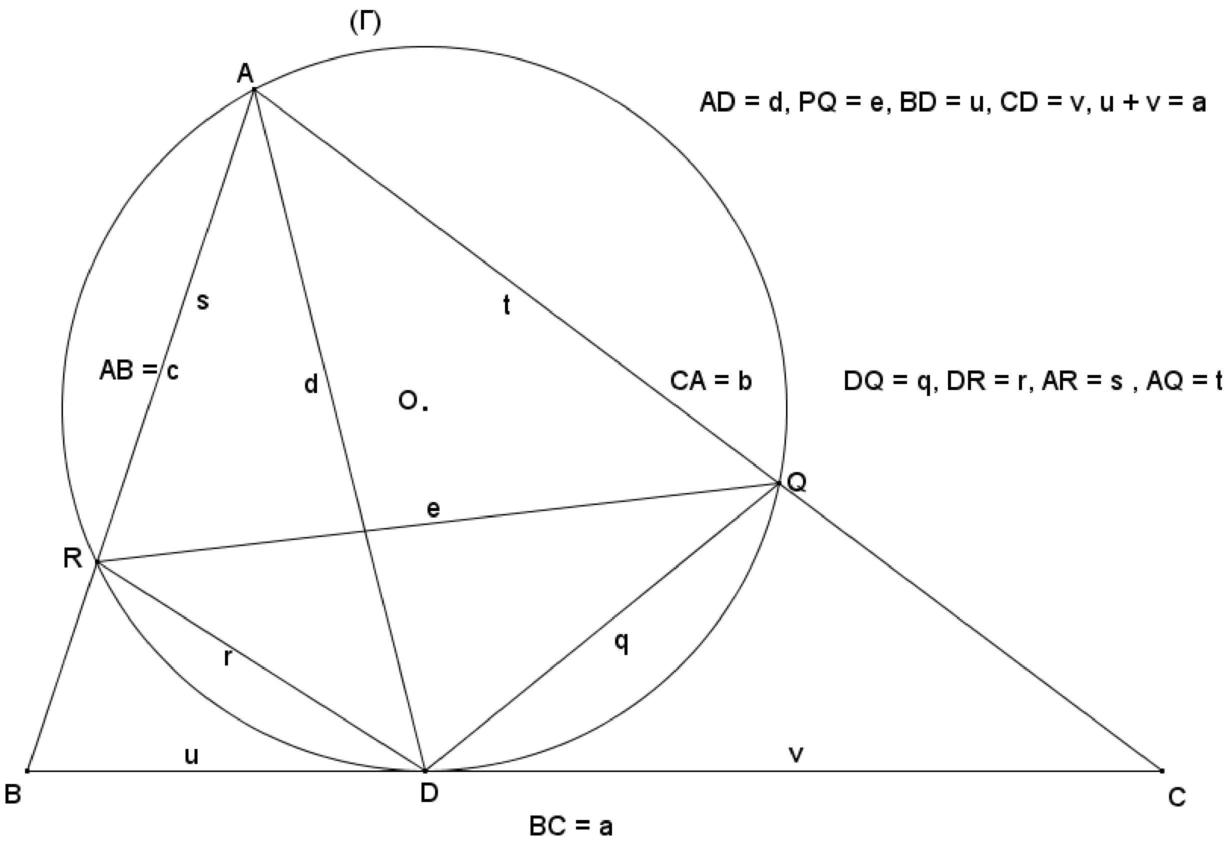
Problema 934

1. ABC a triangle
2. D a point on the segment BC
3. *1a* the circle passing through A and tangent to BC at D
4. Q, R the second points of intersection of *1a* wrt AC, AB.

Prove : $AD^2.BC = AB.AC.QR$.

Aymé, J. L. (2019): comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On pose :

BC = a, CA = b et AB = c puis BD = u, CD = v, u +v = a, AD = d, PQ = e, DQ = q, DR = r , AR = s, AQ = t.

Le quadrilatère AQRD étant inscrit dans le cercle (Γ), le théorème de Ptolémée permet d'écrire :

AD.QR = AR.DQ + AQ.DR ou encore : **de = qs + rt (1)**

Comme ∠BDR = ∠BAD et ∠CDQ = ∠CAD, les triangles ABD et BDR sont semblables entre eux de même que les triangles ACD et CDQ.

D'où $d/b = q/v$ et $d/c = r/u$. La relation (1) devient alors **bce = vs + ut (2)**

La puissance du point B par rapport au cercle (Γ) s'exprime par la relation

$BD^2 = BA.BR$ soit $u^2 = c(c – s)$. D'où $s = (c^2 – u^2)/c$.

De la même façon on écrit $CD^2 = CA.CQ$. D'où $t = (b^2 – v^2)/b$

La relation (2) devient $bce = ub^2 + vc^2 – uv(u + c) =$ ou encore $\mathbf{bce + auv = ub^2 + vc^2}$ **(3)**

Le théorème de Stewart qui est une généralisation du théorème de la médiane dans le triangle ABC avec la cévienne AD donne la relation $\mathbf{a(uv + d^2) = ub^2 + vc^2}$ **(4)**

En rapprochant (3) et (4), on obtient $\mathbf{d^2a = bce}$ sot $AD^2.BC = AB.AC.PQ$. C.q.f.d.