Extra del 15 de Diciembre de 2019 al 29 de febrero de 2020

Propuesto por Jean Louis Aymé

Problema 934

1. ABC un triángulo

2. D un punto sobre el segmento BC

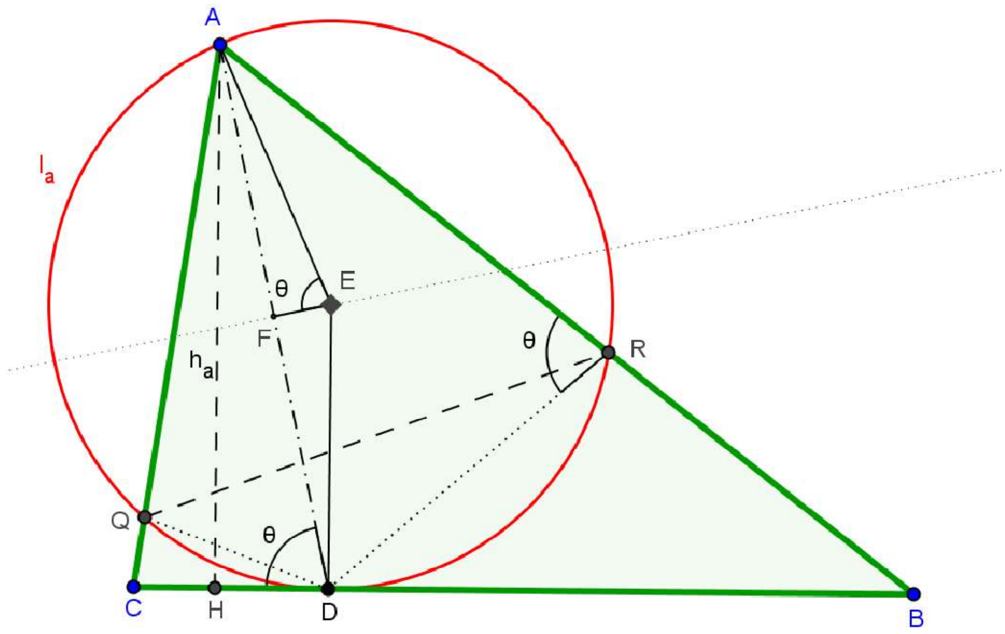
3. l_a la circunferencia que pasa por A y es tangente a BC en D

4. Q, R los otros dos puntos de intersección de l_a con los lados AC, AB.

Demostrar: $AD^2 \cdot BC = AB \cdot AC \cdot QR$.

Aymé, J. L. (2019): comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Para dibujar l_a una vez elegido D, se traza la mediatriz de AD y una perpendicular a BC por D. Estas rectas definen el centro E de la circunferencia, (cada punto D en BC, define un punto E sobre una parábola de foco A y directriz BC).

Para el triángulo ΔAQR, inscrito en l_a se tiene $\frac{QR}{sen\ A} = 2AE$.

El ángulo $\measuredangle ADC$ es igual a la mitad del ángulo central $\measuredangle AED$, así pues, del triángulo rectángulo ΔAEF podemos obtener

$$AD = 2AE \cdot \operatorname{sen}\theta = 2AE \cdot \frac{h_a}{AD} \Rightarrow AD^2 = 2AE \cdot h_a = \frac{h_a \cdot QR}{sen\ A}.$$

Del área $[ABC]$ del triángulo se obtiene $\frac{h_a \cdot BC}{sen\ A} = AB.AC$.

Finalmente

$$AD^2 \cdot BC = \frac{h_a \cdot BC \cdot QR}{sen\ A} = AB.AC.QR$$

■