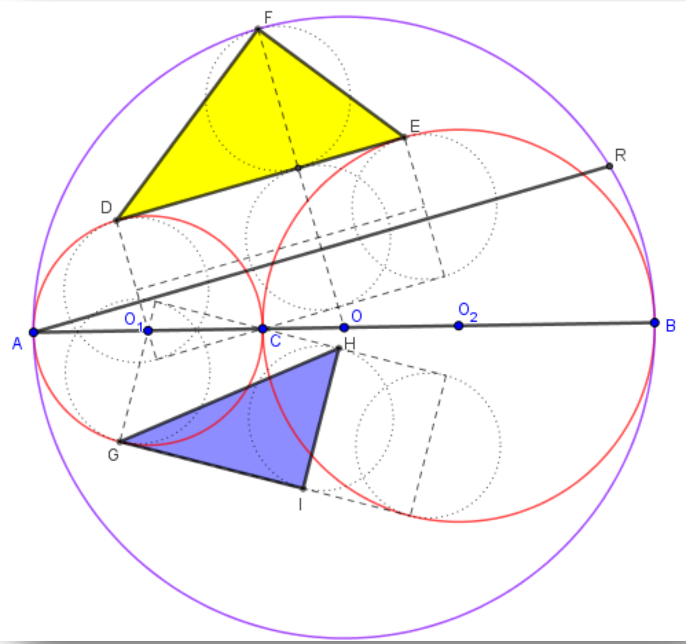
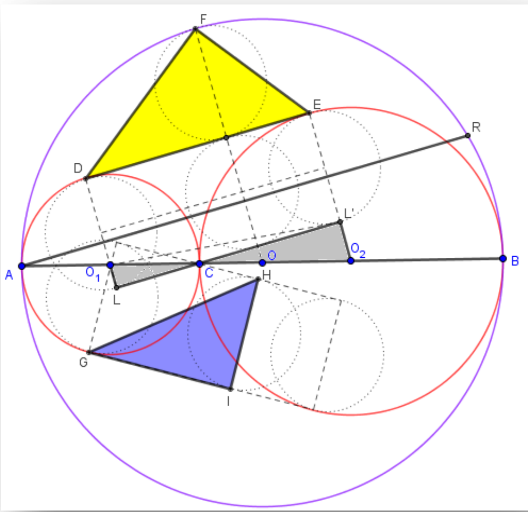
Problema 936.-
Sea dado el arbelos de la figura donde: $AO_1 = a;\ \ O_2B = b$.
Calcula la superficie de los triángulos $\Delta DEF\ \ y\ \ \Delta GIH$ y la longitud del segmento AR en función de $a\, y\ \ b$.



Isach, J. J. (2020): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

En primer lugar y una vez realizada la construcción del arbelos, determinaremos el valor de la tangente común DE.



Suponiendo que $AO_1 = a < \ O_2B = b,$ bastará entonces considerar la longitud del cateto DE en el triángulo rectángulo de cateto $(b-a)$ y de hipotenusa $(a+b)$.

En definitiva, $DE = 2\sqrt{ab}$. De este modo, para hallar el área del triángulo ΔDEF bastará determinar la altura h_F, que coincide con el diámetro de la circunferencia que es tangente a la circunferencia de centro O y radio $a+b$. Además esta altura $h_F = DL = EL'$.

Sea $O_1L = x$, entonces:

$DL = a + x \rightarrow O_2L' = b - (a+x)$.

Por tanto, se verificará:

$$LL' = DE = LC + CL' \ \rightarrow\ 2\sqrt{ab} = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - (b-a-x)^2}$$

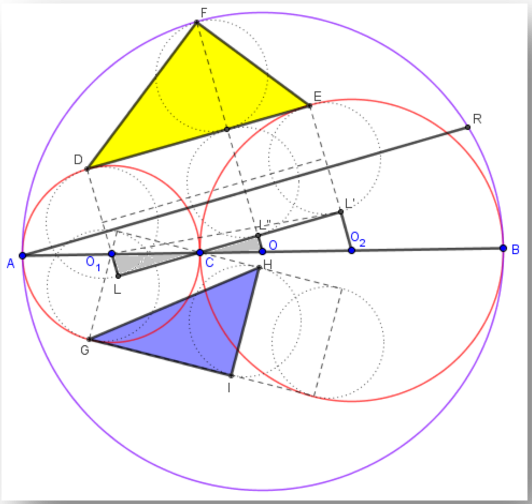
De esa ecuación obtenemos el valor $x = \frac{a(b-a)}{a+b}$.

Por tanto, $h_F = DL = a + x = \frac{2ab}{a+b}$.

Así, el área del triángulo ΔDEF será: $S_1 = [\Delta DEF\,] = \frac{1}{2} DE \cdot h_F$; $S_1 = [\Delta DEF\,] = \frac{1}{2} 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2ab}{a+b}$;

$$\boldsymbol{S_1 = \frac{2ab\,\sqrt{ab}}{a+b}}.$$

Para calcular el área del ΔGIH, nos faltaría hallar la longitud del lado GI. Ahora bien, $GI = LL''$.



De la relación $\Delta CLO_1 \sim \Delta CL''O \rightarrow \frac{CO_1}{CL} = \frac{CH}{CL''}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b-a}{CL''} \rightarrow CL'' = \frac{b-a}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Sustituyendo $x = \frac{a(b-a)}{a+b}$, obtenemos el valor de $CL'' = \frac{2(b-a)\,\sqrt{ab}}{a+b}$

Por tanto, el valor de GI vendrá dado por:

$$GI = LL'' = CL + CL'' = \frac{2b\,\sqrt{ab}}{a+b}$$

Por fin, el área del triángulo ΔGIH será:

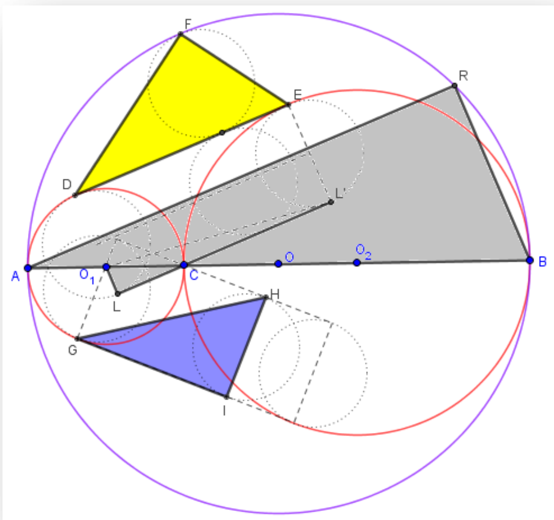
$$S_2 = [\Delta GIH\,] = \frac{1}{2} GI \cdot h_F$$

$$S_2 = [\Delta GIH\,] = \frac{1}{2}\frac{2b\,\sqrt{ab}}{a+b}\frac{2ab}{a+b};$$

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{2ab^2\sqrt{ab}}{(a+b)^2}}.$$

En cuanto al valor de la longitud del segmento AR, tenemos que de la relación:

$$\Delta CLO_1 \sim \Delta ARB \rightarrow \frac{CO_1}{CL} = \frac{AB}{AR} \rightarrow AR = \frac{2(a+b)\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$



Sustituyendo $x = \frac{a(b-a)}{a+b}$, obtenemos el valor del segmento AR.

$$\boldsymbol{AR = 4\sqrt{ab}}.$$