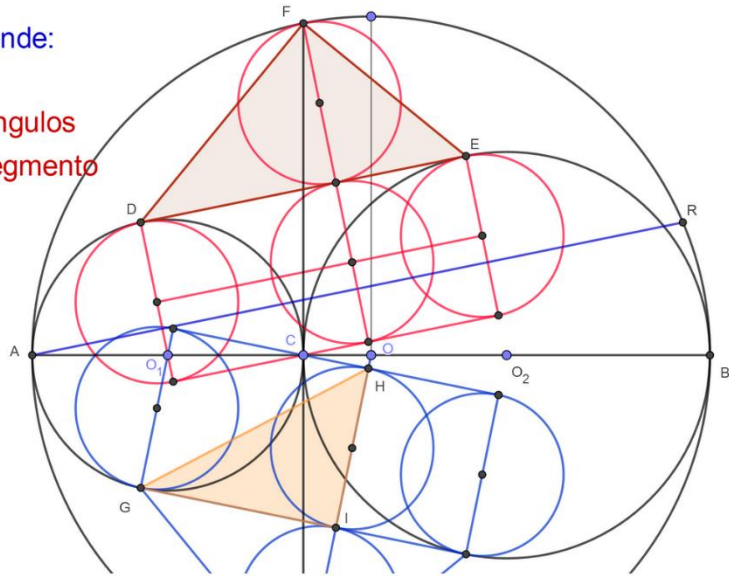


Dado el arbelos de la figura donde:

$$AO_1 = a \quad O_2B = b$$

Calcula la superficie de los triángulos $\triangle DEF, \triangle GIH$ y la longitud del segmento AR en función de a y de b



Aportaciones para la solución del director

La construcción de la figura es:

Se traza la recta O_1O_2 . Un radio cualquiera O_1M_1 de la circunferencia de centro O_1 y un radio O_2M_2 paralelo de la circunferencia de centro O_2 . La recta M_1M_2 interseca a la recta O_1O_2 en N. Trazamos las circunferencias de diámetros NO_1 y NO_2 que nos cortarán a las circunferencias de centro O_1 en D y de centro O_2 en E. Sea $JD=x$, $DE=l$, $JO_1=m$.

Tenemos por semejanza de triángulos, $\frac{a}{x} = \frac{b}{x+l} \quad \frac{x}{m} = \frac{x+l}{m+a+b}$

De donde se tienen : $m = \frac{a(a+b)}{b-a} \quad x = 2a \frac{\sqrt{ab}}{b-a}, \quad l = 2\sqrt{ab}$

Por otra parte, el triángulo rectángulo AFB es tal que FC es su altura, por lo que

$$FC = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{2a \cdot 2b} = 2\sqrt{ab} \quad \text{Así DFEC es un rectángulo de diagonales } 2\sqrt{ab}$$

CF es la altura del triángulo FAB, por lo que $CF = \sqrt{2a \cdot 2b} = 2\sqrt{ab}$

FECD es un rectángulo así DE y CF son las diagonales iguales. $DE = 2\sqrt{ab}$

Así DC es paralelo a FE y EC a FD. Por lo que D, A y F están alineados así como F, E, y B.

Ello significa que Los triángulos rectángulos FDE y FBA son semejantes de razón la división entre las hipotenusas.

Tenemos que $\triangle AFB = (2a+2b)\sqrt{ab}$

Por ello, $\frac{\triangle DEF}{\triangle BFA} = \frac{4ab}{(2a+2b)^2}$ Luego $\triangle DEF = \frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$

El segmento AR es paralelo al DE.

Si tomamos por O_1 una recta paralela a DE, cortará al radio O_2E en V.

$O_1V = DE$, y el triángulo O_1VO_2 es rectángulo en V.

El triángulo O_1VO_2 es semejante al ARB de razón $\frac{1}{2}$, por lo que $AR = 2 O_1V = 2 DE = 4\sqrt{ab}$

El triángulo GIH mediante un giro de centro N y ángulo GND se transforma en el triángulo DVF , siendo V el pie de la altura de F en el triángulo DFE .

Sea F^* el punto de corte de la recta FV con la circunferencia (AB) .

Los triángulos FVD y FAF^* son semejantes.

En FAF^* tenemos $FF^* = 2a + 2b$, hipotenusa.

Al ser AR perpendicular a FF^* , la altura de esta hipotenusa es $\frac{AR}{2} = 2\sqrt{ab}$

$$\text{Así } [FAF^*] = \frac{(2a+2b)2\sqrt{ab}}{2} = 2(a+b)\sqrt{ab}$$

Por otra parte del triángulo DVF conocemos su altura $FV = \frac{2ab}{a+b}$

Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla.