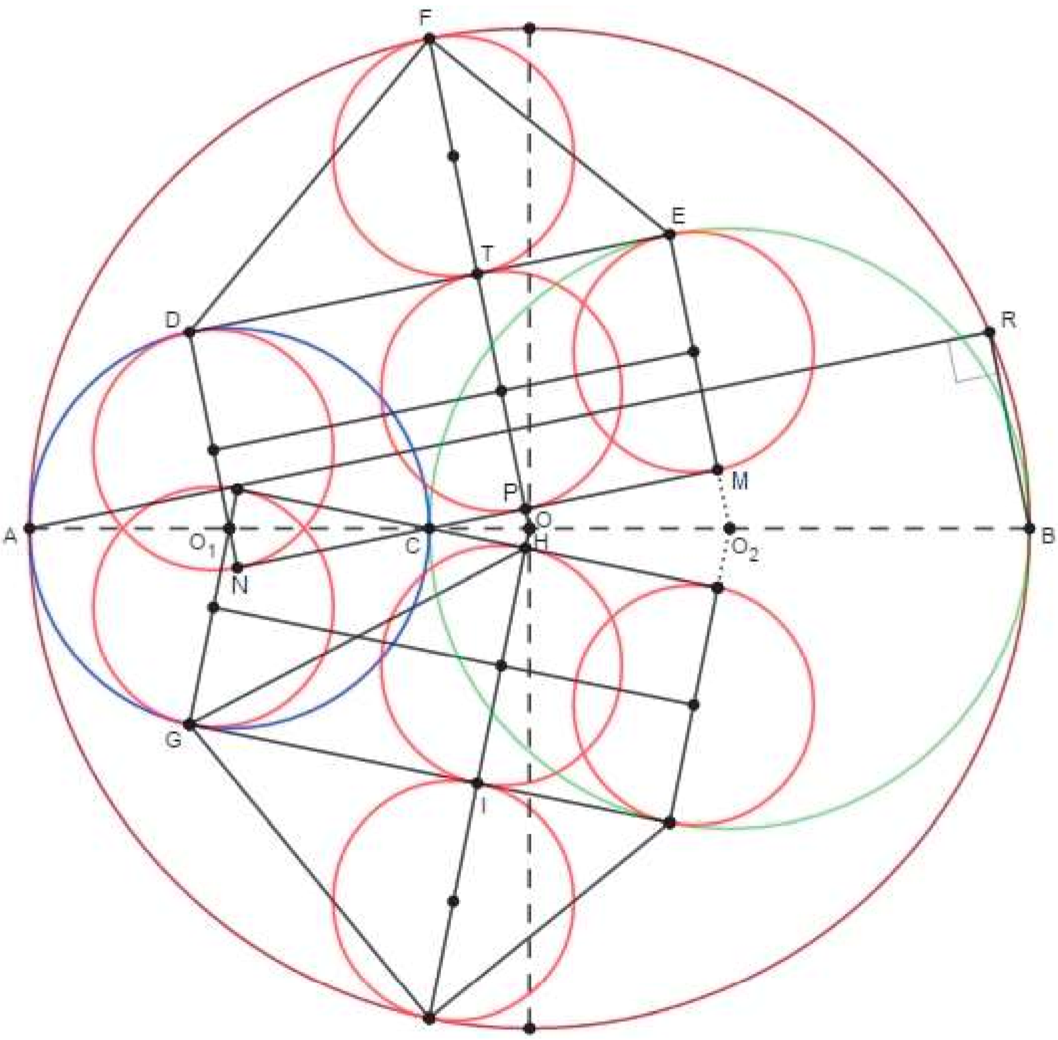
Problema 936. (propuesto por Juan-José Isach Mayo) En el arbelos de la siguiente figura, se verifica que $O_1A = a$ y $O_1B = b$:



Calcular, en función de a y b, las superficies de los triángulos DEF y GIH y la longitud del segmento AR.

Solución:

Llamando r al radio de las circunferencias rojas, como los triángulos CO_2M y CO_1N son semejantes, resulta que:

$$\frac{2r-a}{a} = \frac{b-2r}{b} \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

por lo que:

$$(DEF) = \frac{DE \cdot FT}{2} = \frac{2\sqrt{ab}\left(\frac{2ab}{a+b}\right)}{2} = \frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$$

Además, como los triángulos CO_2M y ARB son semjantes, se verifica que:

$$\frac{b-a}{a+b}=\frac{b-2r}{b}\underset{*}{=}\frac{RB}{AB}=\frac{RB}{2(a+b)}\Rightarrow RB=2(b-a)$$

y, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo RAB, resulta que:

$$AR=\sqrt{AB^2-RB^2}=\sqrt{4(a+b)^2-4(b-a)^2}=4\sqrt{ab}$$

Finalmente, aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos CO_1N y COP, se verifica que:

$$\begin{cases} CN=\sqrt{a^2-O_1N^2}=\sqrt{a^2-(2r-a)^2}=\dfrac{2a\sqrt{ab}}{a+b} \\ CP=\sqrt{(b-a)^2-OP^2}=\sqrt{(b-a)^2-(a+b-4r)^2}=\dfrac{2(b-a)\sqrt{ab}}{a+b} \end{cases}$$

por lo que:

$$(GHI)=(DTF)=\frac{TF\cdot DT}{2}=\frac{2r(CN+CP)}{2}=\frac{ab}{a+b}\left(\frac{2a\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{2(b-a)\sqrt{ab}}{a+b}\right)=\frac{2ab^2\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$