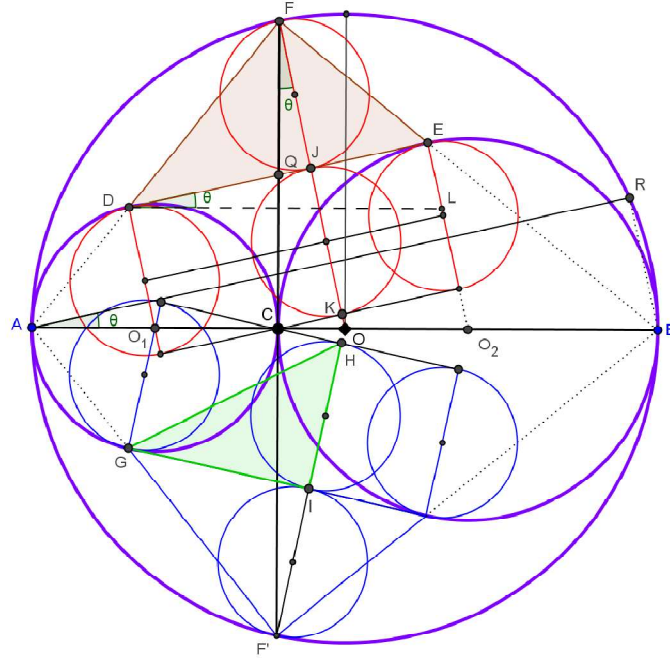


Problema 936.-

Dado el arbelos de la figura



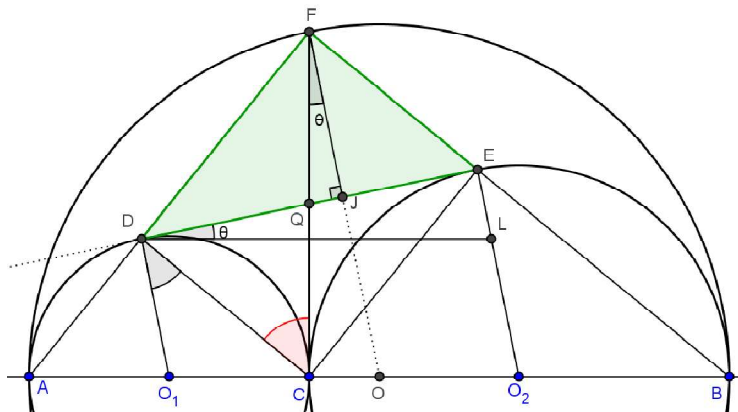
donde $AO_1 = a$; $O_2B = b$. Calcula la superficie de los triángulos $\triangle DEF$, $\triangle GIH$ y la longitud del segmento AR en función de a y b .

Isach, J.J. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Cuestiones preliminares.

Sean D y E los puntos de intersección de los segmentos AF y BF con las circunferencias $(O_1; a)$ y $(O_2; b)$ respectivamente. Vamos a demostrar que estos puntos son los de contacto con la tangente común situada en el semiplano superior.



Por construcción, el cuadrilátero $CDFE$ es un rectángulo. Sus diagonales DE y CF se cortan en el punto medio Q , por tanto, el triángulo QDC es

isósceles. También lo es $\triangle O_1DC$.

En esta situación vamos a demostrar que el cuadrilátero QDO_1C , que se compone con esos dos triángulos isósceles, es cíclico y como el ángulo en C es recto también lo será su opuesto,

el ángulo en D . En efecto $\angle D = \angle O_1DC + \angle CDQ = \angle DCO_1 + \angle QCD = \angle C = 90^\circ$. Y con esto queda demostrada la cuestión.

Sea θ el ángulo que forma la recta DE con el diámetro AB de $(O; a + b)$. Es el ángulo en D del triángulo rectángulo $\triangle DEL$, donde $DL = b + a$ y $EL = b - a$. Este es también el ángulo de CF con el radio OF como es fácil ver.

Por el teorema de Pitágoras en $\triangle DEL$, tenemos $DE = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$ y esa es también la longitud del segmento CF , altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo AFB . Ambos segmentos tienen la misma longitud por ser las diagonales de un rectángulo.

Ahora podemos calcular $\sin \theta = \frac{b-a}{b+a}$ y $\cos \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{b+a}$.

Área del triángulo DEF

Con la conocida fórmula de la base y la altura tendremos

$$[DEF] = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot FJ = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot FQ \cos \theta = \frac{1}{4} \cdot DE \cdot CF \cdot \cos \theta = 2ab \cdot \frac{\sqrt{ab}}{b+a}$$

También podemos calcular el área tomando DF y EF como base y altura del triángulo. Para calcular estos segmentos nos fijamos en los triángulos rectángulos semejantes ADC y CEB . Si llamamos ma , na a las longitudes de los catetos del primero, por la semejanza, los del segundo son mb y nb (con $m^2 + n^2 = 4$).

Los lados DF y EF son respectivamente iguales a los lados CE y CD , de longitudes mb y na . Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo DCE se tiene

$$\left. \begin{aligned} (mb)^2 + (na)^2 &= 4ab \\ m^2 + n^2 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema se obtienen

$$m^2 = \frac{4a}{b+a} \text{ y } n^2 = \frac{4b}{b+a} \text{ de donde } DF = CE = mb = 2b \cdot \sqrt{\frac{a}{b+a}} \text{ y } EF = CD = na = 2a \cdot \sqrt{\frac{b}{b+a}}$$

Ahora se tiene $[DEF] = \frac{1}{2} DE \cdot DF = \frac{2ab}{b+a} \cdot \sqrt{ab}$.

Área del triángulo GIH

Si hacemos una simetría respecto de la recta AB , el triángulo GIH se transforma en el triángulo DJK (primera figura). Necesitamos conocer las longitudes de DJ y JK para poder calcular su área.

Según el teorema del cateto aplicado al triángulo DEF se tiene $DF^2 = DE \cdot DJ$ de donde obtenemos $DJ = \frac{DF^2}{DE} = \frac{4ab^2}{b+a} : 2\sqrt{ab} = 2 \frac{b\sqrt{ab}}{b+a}$ y $JE = DE - DJ = 2 \frac{a\sqrt{ab}}{b+a}$.

Aplicando el teorema de la altura se obtiene $FJ^2 = JE \cdot DJ = \left(\frac{2ab}{b+a}\right)^2 \Rightarrow FJ = \frac{2ab}{b+a} = JK$ y por tanto $[GIH] = \frac{1}{2} \cdot DJ \cdot JK = \frac{1}{2} \cdot DJ \cdot FJ = \frac{b\sqrt{ab}}{b+a} \cdot \frac{2ab}{b+a} = \frac{2ab^2\sqrt{ab}}{(b+a)^2}$

Longitud de AR

Los triángulos DEL y ARB son semejantes; su razón de semejanza es $\frac{AB}{DL} = 2$, por tanto $AR = 2DE = 4\sqrt{ab}$, y con esto concluimos. ■