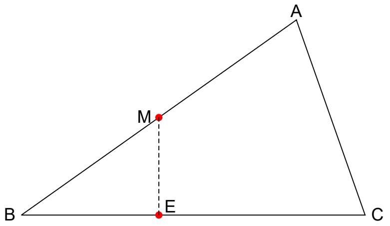
Pr. Cabri 937

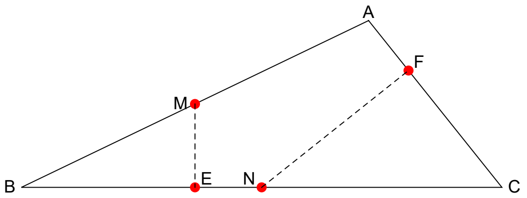
Enunciado

1. Dado un triángulo ABC, se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre BC, tal como en la figura.



Probar que AC + CE = 3BE ⇔ ∠ACB = 2∠CBA

2. Consideramos además N, punto medio de AB y su proyección F sobre AC, como en la figura.



Probar que $\begin{cases} AC + CE = 3\,BE \\ AB + AF = 3\,CF \end{cases}$ ⇔ ABC es un triángulo heptagonal

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de Ercole Suppa publicado en Perú Geométrico.

Solución

de César Beade Franco

1. Sea el triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0). Entonces M=($\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$) y E=($\frac{a}{2}$, 0).
De la condición AC+CE = 3BE deducimos que b = $\sqrt{a\,(3\,a-2)}$.
Por otra parte, tgB = $\frac{b}{a}$ así que tg(2B) = $\frac{2\,ab}{a^2-b^2}$. Además tgC = $\frac{b}{1-a}$.
Por tanto Tg(2B)=tgC ⇔ $\frac{2\,ab}{a^2-b^2}=\frac{b}{1-a}$ ⇔ b = $\sqrt{a\,(3\,a-2)}$ ⇔ AC+CE = 3BE.

2. Renombrando los vértices y aplicando lo demostrado en el apartado anterior AB+AF=3CF ⇔ ∠A = 2∠C.
Y como AC + CE = 3BE ⇔ ∠C = 2∠B, resulta que los ángulos B, C y A, están en la proporción 1:2:4, que es la condición para que un triángulo sea heptagonal.