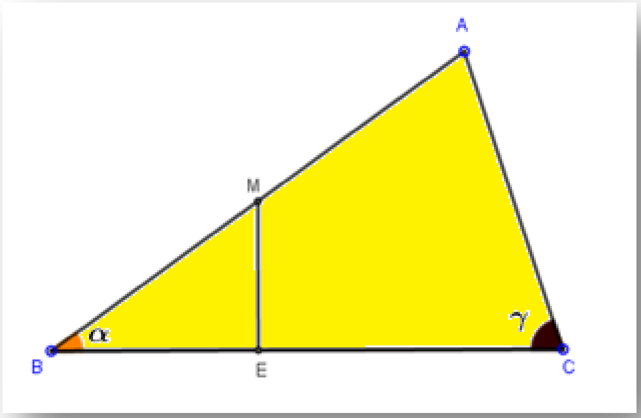
Problema 937.-

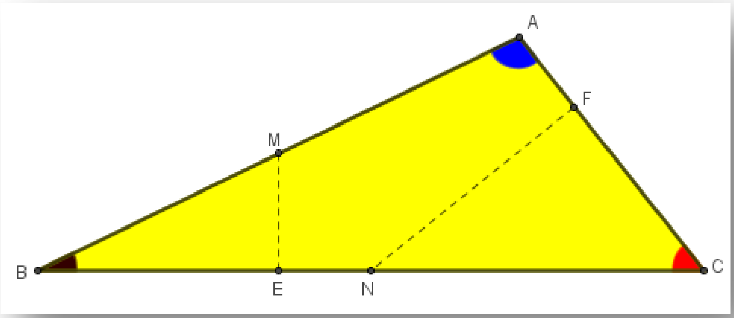
1) Dado un triángulo ABC, se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$AC + CE = 3 \cdot BE \iff \measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA.$$

2) Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y BC, respectivamente, y sus respectivas proyecciones ortogonales E y F, sobre las rectas BC y AC, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$\begin{cases} AC + CE = 3 \cdot BE \\ AB + BF = 3 \cdot CF \end{cases} \iff \Delta ABC \text{ es un triángulo heptagonal}.$$

Pérez-García, M. A. (2020): Comunicación personal.

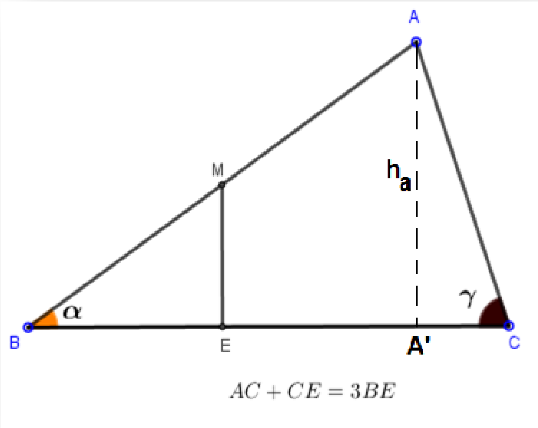
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Ejercicio 1.-

⇒ Supongamos que $AC + CE = 3 \cdot BE$.

Llamamos $x = BE \to AC + CE = 3 \cdot BE \to \; b + a - x = 3x \to \; a + b = 4x$.
En definitiva, $x = BE = \frac{a+b}{4}$.
Sea $h_a = AA'$, la altura correspondiente al vértice A. Por tanto, $EA' = \frac{a+b}{4}$ y $A'C = \frac{a-b}{2}$.
Tenemos que $\cos\alpha = \frac{a+b}{2c} \to sen^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2$.

Por otro lado, $\cos\gamma = \frac{a-b}{2b}$.



Vamos a probar que $\cos\gamma = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ y así, de esta forma, tendremos probado que $\gamma = 2\alpha$.

Para ello, bastará comprobar que:

$$\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 - 1 + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 = \frac{a-b}{2b}$$

Ahora bien, esto es equivalente a probar que:

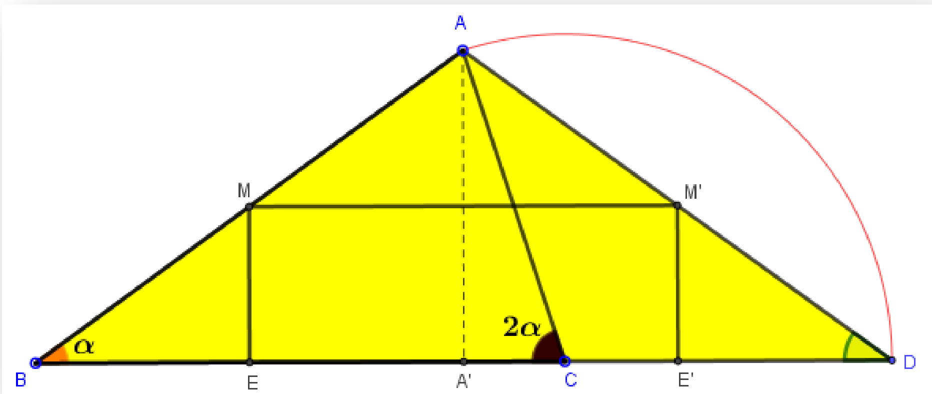
$$2\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 - \frac{a-b}{2b} = 1$$

$$\frac{(a+b)^2}{2c^2} - \frac{a-b}{2b} = 1$$

Ahora bien, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{a-b}{2b} = a^2 + b^2 - a(a-b) = b(a+b)$.
Por tanto,

$$\frac{(a+b)^2}{2b(a+b)} - \frac{a-b}{2b} = 1 \rightarrow \frac{a+b}{2b} - \frac{a-b}{2b} = 1, \quad cqd \quad \blacksquare$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $\boldsymbol{\measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA}$.



Por tanto, en el ΔABC, prolongamos sobre el lado $BC = a$, el lado $AC = b$. De este modo, construimos el nuevo triángulo isósceles ABD. Por los puntos medios M y M' de los lados iguales AB y AD, obtenemos que $MM' = EE' = 4 \cdot BE \rightarrow a + b = 4 \cdot BE$.

En definitiva, se verifica que $AC + BC = 4 \cdot BE$.

Expresión esta última equivalente a:

$$\boldsymbol{AC + CE = 3 \cdot BE}. \quad cqd \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2.-

Aplicando el resultado del Ejercicio 1, tenemos que:

$$\begin{cases} AC + CE = 3 \cdot BE \\ AB + BF = 3 \cdot CF \end{cases} \Leftrightarrow (\textbf{\textit{Ejercicio 1}}) \Leftrightarrow \begin{cases} \measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA \\ \measuredangle BAC = 2\measuredangle ACB \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC\ es\ un\ triángulo\ heptagonal.$$

En efecto, si se verifica esta relación entre los ángulos del triángulo ΔABC, entonces

$\measuredangle A = 2\measuredangle C = 4\measuredangle B \rightarrow \begin{cases} \measuredangle A = \frac{4\pi}{7} \\ \measuredangle B = \frac{\pi}{7} \\ \measuredangle C = \frac{2\pi}{7} \end{cases}$ lo que significa que, en efecto,

$\Delta ABC\ es\ un\ triángulo\ heptagonal.$