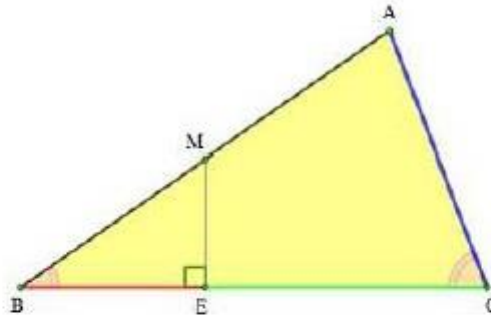


Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de Ercole Suppa publicado en Perú Geométrico con su permiso( Agradezco a Ercole su predisposición)

Problema 937

### Ejercicio 2.

- ① Dado un triángulo  $ABC$ , se consideran el punto medio  $M$  del segmento  $AB$  y su proyección ortogonal  $E$  sobre la recta  $BC$ , tal como se muestra en la siguiente figura:

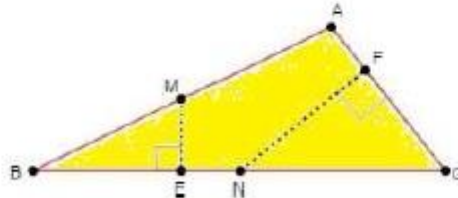


Probar que:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle CBA$$

(propuesto por Ercole Suppa)

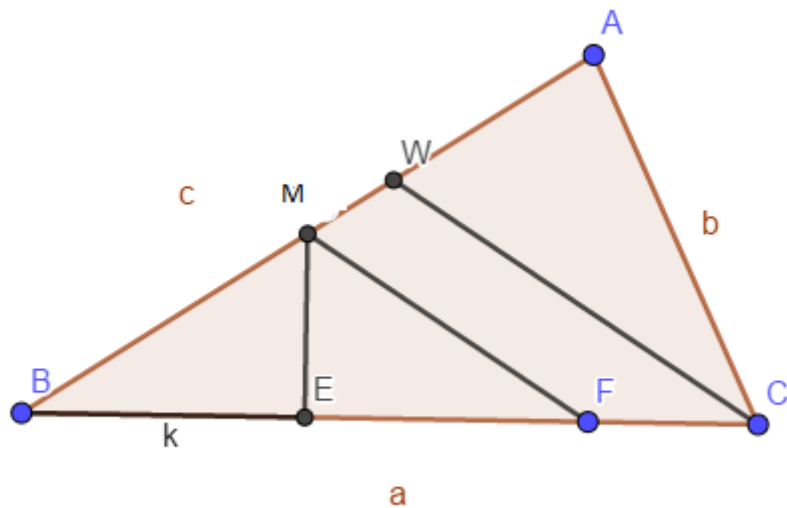
- ② Dado un triángulo  $ABC$ , se consideran los puntos medios  $M$  y  $N$  de los segmentos  $AB$  y  $BC$ , respectivamente, y sus respectivas proyecciones ortogonales  $E$  y  $F$  sobre las rectas  $BC$  y  $AC$ , tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

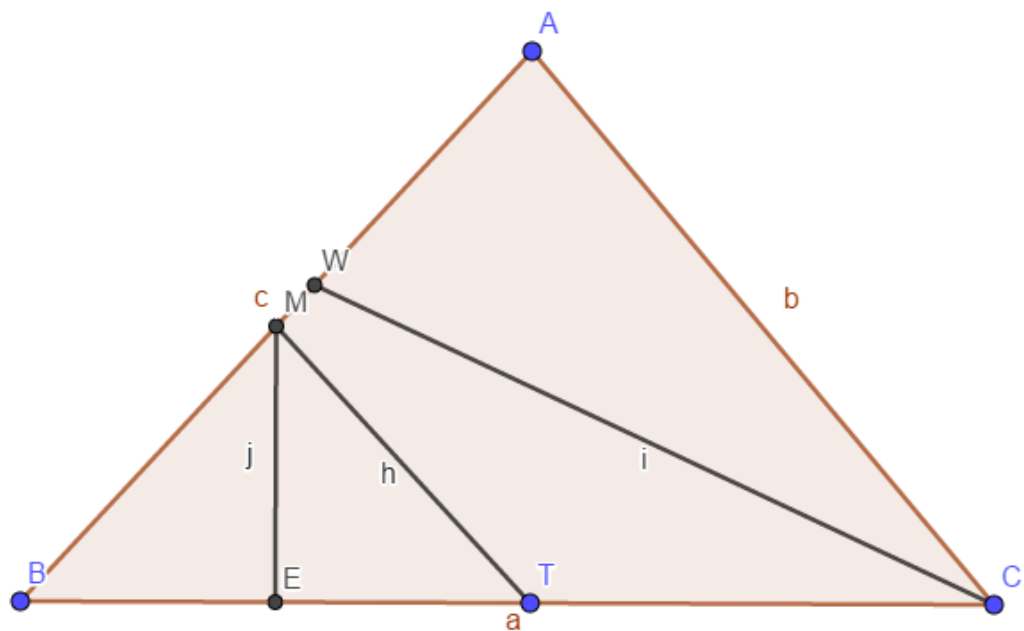
$$\begin{cases} AC + CE = 3BE \\ AB + AF = 3CF \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Pérez-García M. A. (2020): Comunicación personal.



Siendo  $\angle C = 2\angle B$ , Si trazamos la simétrica MF de MB según DE y la bisectriz de C, CW, son paralelas y tenemos que los triángulos BMF y BWC son semejantes.

$$\text{Es } \frac{BM}{BW} = \frac{BF}{BC} \rightarrow \frac{\frac{c}{2}}{\frac{ca}{a+b}} = \frac{2BE}{a} \rightarrow 4BE = a + b = BE + CE + AC \rightarrow 3BE = CE + AC.$$



Supongamos que  $3BE = CE + AC$ . Sea  $BE = n$ . Es  $b + a = 4n$

Tracemos la bisectriz CW. Y el simétrico MT de MB respecto a ME. Consideremos los triángulos MBT y WBC

$$\frac{MB}{BT} = \frac{\frac{c}{2}}{2n} = \frac{c}{4n}$$

$$WB = \frac{ca}{a+b} = \frac{ca}{4n}, BC = a \rightarrow \frac{WB}{BC} = \frac{c}{4n}$$

Lo que implica que MT y WC han de ser paralelos, y por tanto  $\angle C = 2\angle B$

Por el mismo motivo, si  $AB+AF=3CF \leftrightarrow \angle A = 2\angle C$

Es decir, los ángulos han de ser  $\pi/7$ ,  $2\pi/7$ , y  $5\pi/7$  y el triángulo es heptagonal.