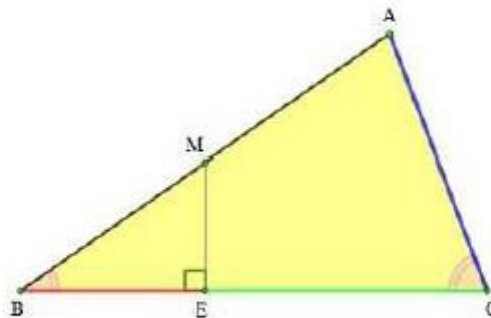


Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de Ercole Suppa publicado en Perú Geométrico con su permiso(Agradezco a Ercole su predisposición).

Problema 937

Ejercicio 2.

- ① Dado un triángulo ABC , se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC , tal como se muestra en la siguiente figura:

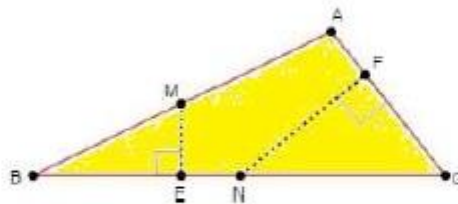


Probar que:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle CBA$$

(propuesto por Ercole Suppa)

- ② Dado un triángulo ABC , se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y BC , respectivamente, y sus respectivas proyecciones ortogonales E y F sobre las rectas BC y AC , tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

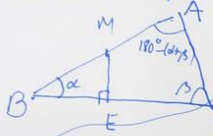
$$\begin{cases} AC + CE = 3BE \\ AB + AF = 3CF \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Pérez-García M. A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado) ..

Propuesto por Miguel Angel Perez Garcia Ortega

- ① $\triangle ABC$, M punto medio de AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC
 Probar que $AC+CE=3BE \Leftrightarrow \angle ACB=2\angle CBA$



$$AC+CE=3BE \Rightarrow AC+BC-BE=3BE \Rightarrow AC+BC=4BE$$

$$BE = BM \cos \alpha = \frac{1}{2} AB \cos \alpha$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{AC+BC}{\sin \alpha + \sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin \beta}$$

$$AC+BC = 2AB \cos \alpha$$

$$\frac{2AB \cos \alpha}{\sin \alpha + \sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin \beta}$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha + \sin(\alpha+\beta)$$

$$0 = \sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$0 = \sin \alpha + \sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin \alpha = -\sin(\alpha-\beta)$$

$$\alpha = -(\alpha-\beta)$$

$$\boxed{2\alpha = \beta}$$

$$\beta = 2\alpha$$

$$180^\circ - (3\alpha)$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{BC}{\sin 3\alpha} \Rightarrow AC = \frac{AB}{2 \cos \alpha} = \frac{BC}{3-4 \sin^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$AC = \frac{AB}{2 \cos \alpha}$$

$$CE = BC - BE = BC - \frac{1}{2} AB \cos \alpha = AB \left[\frac{3-4 \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cos \alpha \right] \Rightarrow AC+CE = \frac{AB(3-3 \sin^2 \alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{3 AB \cos \alpha}{2} = 3BE$$

$$BC = \frac{(3-4 \sin^2 \alpha) AB}{2 \cos \alpha}$$

- $\triangle ABC$ es un triángulo heptagonal $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{7} \wedge \beta = \frac{2\pi}{7} \wedge \gamma = \frac{4\pi}{7}$
 como $\beta = 2\alpha$ por el apartado anterior $\Rightarrow AC+CE=3BE$ siendo E proyección ortogonal de M (punto medio de AB) sobre BC
 $\gamma = 2\beta$ " " " " $\Rightarrow AB+AF=3CF$ siendo F la proyección ortogonal de N (punto medio BC) sobre AC
 $\triangle ABC$ triángulo heptagonal $\Leftrightarrow \begin{cases} AC+CE=3BE \\ AB+AF=3CF \end{cases}$ c.g.d.