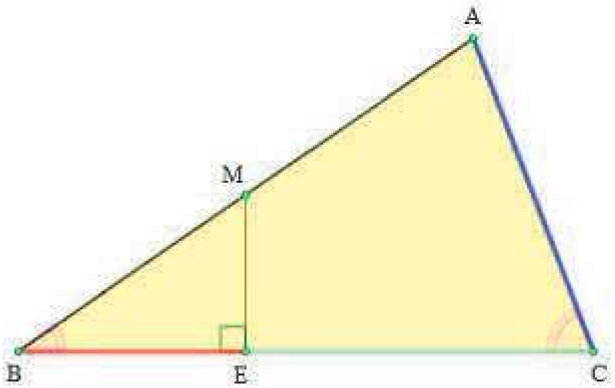
Problema 937. (Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de ErcoleSuppa publicado en Perú Geométrico)

① Dado un triángulo ABC, se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC, tal como se muestra en la siguiente figura:

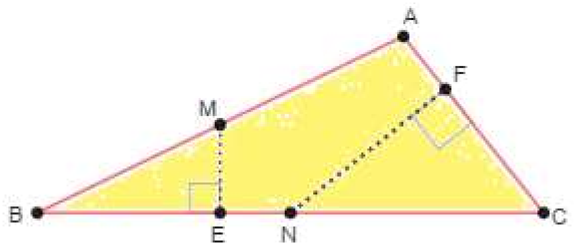


Probar que:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA$$

(propuesto por Ercole Suppa)

② Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y BC, respectivamente, y sus respectivas proyecciones ortogonales E y F sobre las rectas BC y AC, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$\left\{\begin{array}{l} AC + CE = 3BE \\ AB + AF = 3CF \end{array}\right. \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Solución:

① Llamando D al pie de la bisectriz interior correspondiente al vértice C del triángulo ABC y considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como:

$$\left\{\begin{array}{l} D = (a : b : 0) \\ M = (0 : 1 : 1) \Rightarrow E = \left(0 : \dfrac{3a^2 + b^2 - c^2}{4a^2} : \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{4a^2}\right) \end{array}\right.$$

resulta que:

❶ Como:

$$\begin{cases} BD^2 = \dfrac{a^2c^2}{(a+b)^2} \\ CD^2 = \dfrac{ab(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2} \end{cases}$$

entonces:

$$\measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA \Leftrightarrow BD = CD \Leftrightarrow 0 = CD^2 - BD^2 = \frac{a(ab+b^2-c^2)}{a+b} \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0$$

❷ Como:

$$\begin{cases} BE = \left(\dfrac{3a^2+b^2-c^2}{4a^2}\right)a = \dfrac{3a^2+b^2-c^2}{4a} \\ CE = \left(\dfrac{a^2-b^2+c^2}{4a^2}\right)a = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{4a} \end{cases}$$

entonces:

$$AC + CE - 3BE = b + \frac{a^2-b^2+c^2}{4a} - 3\left(\frac{3a^2+b^2-c^2}{4a}\right) = \frac{ab+b^2-c^2}{a}$$

por lo que:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \frac{ab+b^2-c^2}{a} = 0 \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0$$

Por tanto:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0 \Leftrightarrow \measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA$$

② Utilizando el resultado probado en el apartado anterior, resulta que:

$$\begin{cases} AC+CE=3BE \\ AB+AF=3CF \end{cases} \underset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \measuredangle ACB = 2\measuredangle CBA \\ \measuredangle BAC = 2\measuredangle ACB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \measuredangle CBA = \dfrac{\pi}{7} \\ \measuredangle ACB = \dfrac{2\pi}{7} \\ \measuredangle BAC = \dfrac{4\pi}{7} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$