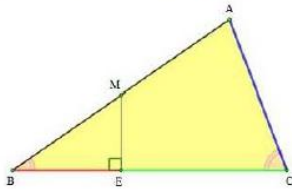


Problema 937

- ① Dado un triángulo ABC , se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC , tal como se muestra en la siguiente figura:

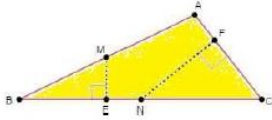


Probar que:

$$AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle CBA$$

(propuesto por Ercole Suppa)

- ② Dado un triángulo ABC , se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y BC , respectivamente, y sus respectivas proyecciones ortogonales E y F sobre las rectas BC y AC , tal como se muestra en la siguiente figura:



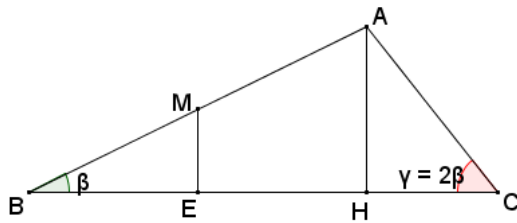
Probar que:

$$\begin{cases} AC + CE = 3BE \\ AB + AF = 3CF \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

1^{er} question

1^{er} cas : par hypothèse $\angle ACB = 2\angle ABC$



Sans perte de généralité, on pose $AB = 2$.

H est le pied de la hauteur issue de A sur le côté BC .

Comme M est le milieu de AB , E est milieu de BH .

Soit $\angle ABC = \beta$ avec $0 < \beta < \pi/2$. D'où $\angle ACB = 2\beta$.

On a les relations : $BE = \cos(\beta) = EH$

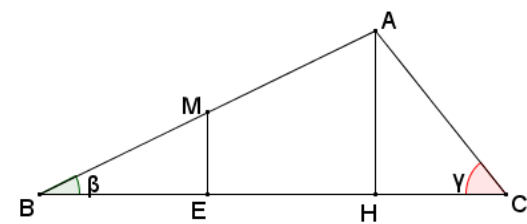
$AH = AC \sin(2\beta)$. D'où $AC = 2 \sin(\beta) / \sin(2\beta) = 1 / \cos(\beta)$

$CH = AC \cos(2\beta) = \cos(2\beta) / \cos(\beta) = 2 \cos(\beta) - 1 / \cos(\beta)$

$AC + CE = AC + CH + HE = 1 / \cos(\beta) + 2 \cos(\beta) - 1 / \cos(\beta) + \cos(\beta)$

soit $AC = 3 \cos(\beta) = 3BE$. c.q.f.d.

2^{ème} cas : par hypothèse $AC + CE = 3BE$



On pose $\angle ABC = \beta$ et $\angle ACB = \gamma$

Avec les mêmes notations que précédemment, on a $AH = AC \sin(\gamma)$.

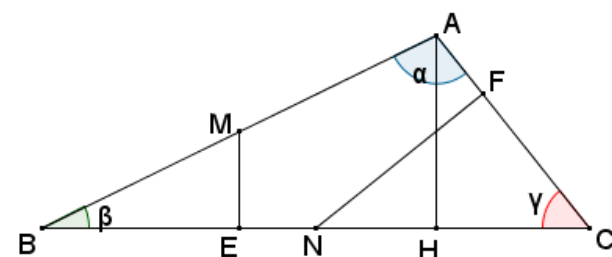
D'où $AC = 2 \sin(\beta) / \sin(\gamma)$ et $CH = 2 \sin(\alpha) \cos(\gamma) / \sin(\gamma)$

Il en résulte : $2 \sin(\beta) / \sin(\gamma) + 2 \sin(\beta) \cos(\gamma) / \sin(\gamma) + \cos(\beta) = 3 \cos(\beta)$

D'où $\sin(\beta) + \sin(\beta) \cos(\gamma) = \cos(\beta) \sin(\gamma)$ soit $\sin(\beta) = \sin(\gamma - \beta)$

ce qui donne $\gamma - \beta = \pi - \beta$ ou $\gamma = \pi$ à exclure et $\gamma = 2\beta$. c.q.f.d.

2^{ème} question



On désigne par α, β, γ les trois angles $\angle BAC$, $\angle ABC$ et

$\angle ACB$ avec $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Par hypothèse $AC + CE = 3BE$. Donc $\gamma = 2\beta$

$AB + AF = 3CF$. Donc $\alpha = 2\gamma = 4\beta$.

On en déduit que le triangle ABC est heptagonal avec les trois angles $\beta = \pi/7$, $\gamma = 2\pi/7$ et $\alpha = 4\pi/7$ c.q.f. d.