

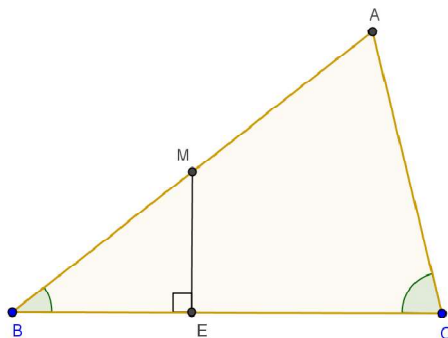
Quincena del 1 al 15 de Marzo de 2020

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de Ercole Suppa publicado en Perú Geométrico con su permiso (Agradezco a Ercole su predisposición).

Problema 937.-

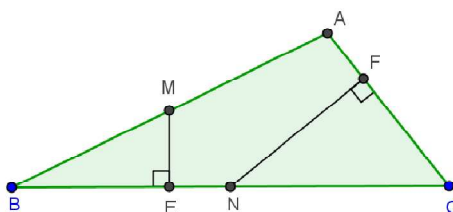
Ejercicio 2

1. Dado el triángulo ABC , se consideran el punto medio M del segmento AB y su proyección ortogonal E sobre la recta BC , como se muestra en la siguiente figura:



Probar que $AC + CE = 3BE \Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle CBA$.

2. Dado un triángulo ABC , se consideran los puntos medios M y N de los segmentos AB y BC , respectivamente y sus respectivas proyecciones ortogonales E y F sobre las rectas BC y AC , tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que $(AC + CE = 3BE) \wedge (AB + AF = 3CF) \Leftrightarrow ABC$ es un triángulo heptagonal.

Pérez, M. A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Del triángulo rectángulo $\triangle BEM$ se obtiene $\cos B = \frac{2 \cdot BE}{c}$

1.- ($\Rightarrow$)

Llamo $CE = x$, por tanto $BE = a - x$, la condición del problema es $b + x = 3(a - x)$, que al resolver nos da $CE = x = \frac{3a-b}{4}$ y por tanto, $BE = a - x = \frac{a+b}{4}$ y $\cos B = \frac{a+b}{2c}$.

Por otra parte, según el teorema del coseno, se tiene $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Simplificando la expresión $\frac{a+b}{2c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ llegamos a

$$c^2 - b^2 = ab \quad (E_1)$$

Por las fórmulas del ángulo doble y el teorema de los senos se tiene ahora

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{b}{c} \cdot \sin C \cdot \frac{a+b}{c} = \frac{ab + b^2}{c^2} \cdot \sin C$$

Aplicamos ahora la relación (E_1) y resulta $\frac{ab+b^2}{c^2} = 1$, y por tanto $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CBA$, como queríamos demostrar.

($\Leftarrow$)

$$\text{Si } \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \sin C \Rightarrow 2 \cdot \cos B = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = 2b \cdot \cos B = 2b \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\text{De } c = 2b \cdot \cos B \text{ resulta } \cos B = \frac{2 \cdot BE}{c} = \frac{c}{2b} \Rightarrow BE = \frac{c^2}{4b}$$

y de $c = 2b \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ se sigue $ac^2 = b(a^2 + c^2 - b^2) \Leftrightarrow c^2(a - b) = b(a^2 - b^2) \Rightarrow c^2 = b(a + b)$, suponiendo $a \neq b$.

$$c^2 = b(a + b) \quad (E_2)$$

Ahora a calcular utilizando esta última expresión:

$$BE = \frac{c^2}{4b} = \frac{b(a + b)}{4b} = \frac{a + b}{4}$$

$$AC + CE = b + (a - BE) = b + a - \frac{c^2}{4b} = \frac{4b^2 + 4ab - c^2}{4b} = \frac{4b^2 + 4ab - b(a + b)}{4b} = \frac{3(a + b)}{4}$$

Por tanto $AC + CE = 3BE$ como queríamos demostrar.

Si $a = b$ y $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CBA$, tendríamos también $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$. Tendríamos un triángulo rectángulo en C e isósceles, donde se verifica trivialmente la propiedad: $CA + CE = \frac{3}{2}a$ y $BE = \frac{a}{2}$.

2.- Es una consecuencia de lo ya demostrado. La expresión de la primera parte, para el vértice B se enunciaría poniendo $BA + AF = 3CF$, y la conclusión sería que $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ACB$. Por tanto, los ángulos de ese triángulo, serían $\beta = \sphericalangle CBA$; $\gamma = \sphericalangle ACB = 2\beta$ y $\alpha = \sphericalangle BAC = 2\gamma = 4\beta$.

La suma de esos ángulos $\beta + 2\beta + 4\beta = 7\beta = 180^\circ$. Se trata de un triángulo heptagonal.

■