Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

Problema 938

Sea ABC un triángulo con circuncículo Ω e incentro I.

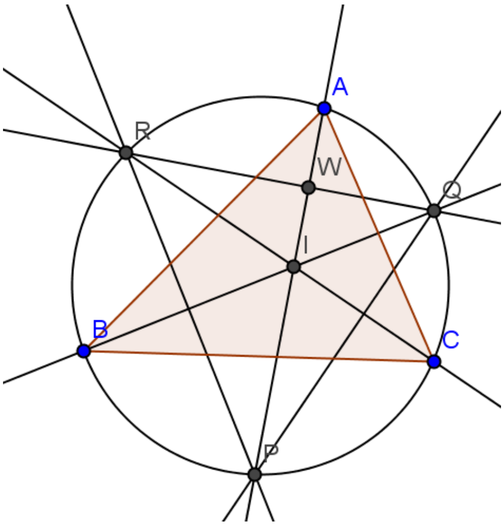
Una línea ℓ intersecta las líneas AI, BI, y CI en los puntos D, E y F, respectivamente, distintos de los puntos A, B, C, y I.

Las mediatrices de los segmentos AD,BE y CF respectivamente determinan un triángulo Θ. Muestre que el circuncírculo del triángulo Θ es tangente a Ω.

Mathematical Ashes (2019): UK-Australia, problema 3.

Solución del director.

Observemos en primer lugar esta configuración geométrica:

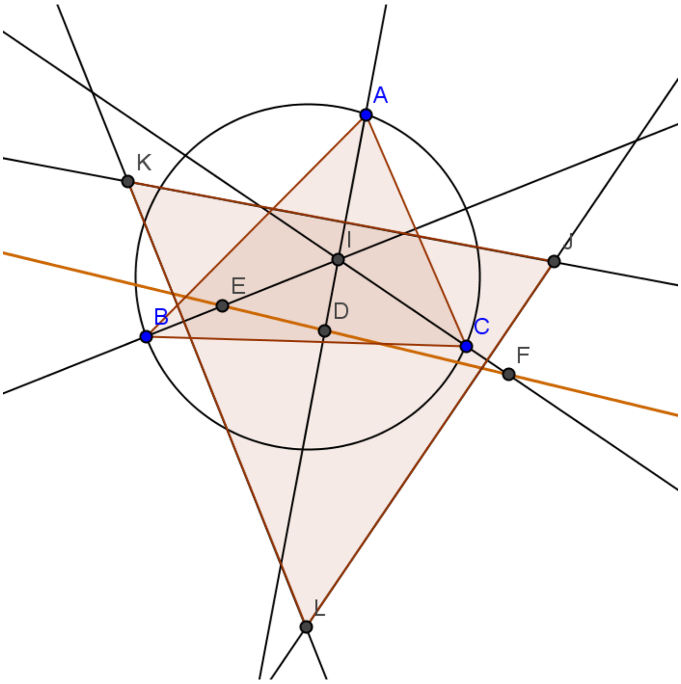



En un triángulo las bisectrices cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita en P, Q, y R de forma que ∠IAQ=$\angle IAC+\angle CAQ=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}, \angle AQR=\frac{\gamma}{2}\, \angle AWQ=90º$

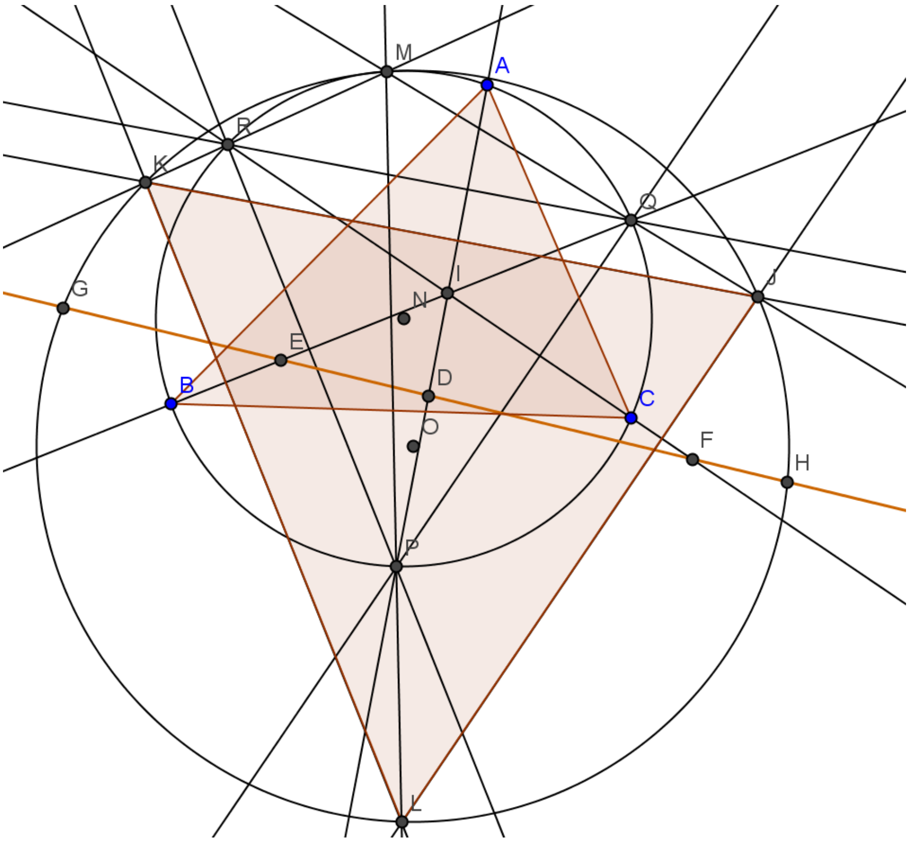
Y es $\angle WQI=\frac{\gamma}{2}, \angle IWQ=90º, \angle WIQ=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, con lo que tenemos que RQ es la mediatriz de AI, RP lo es de BI y PQ de CI.

Además el triángulo circunscrito PQR tiene de ángulos $\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$.

Estudiemos la estructura geométrica del problema propuesto:




El triángulo LJK propuesto es homotético al PQR estudiado previamente. Pues los lados son paralelos, y tienen un centro de homotecia en M.



Las circunferencias circunscritas a RQP y a KJL deben tener como valor del ángulo capaz del segmento RQ y KJ $180º - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$, común para los dos y por tanto al ser la construcción de M verificando la igualdad, ha de ser el punto de tangencia buscado.

Añadido

*También se puede considerar los puntos medios de los lados de RQP y KJL, que no están señalados en la figura. Tales puntos son homólogos en la homotecia construida.*

*Ello significa que los triángulos análogos que forman los centros de las circunferencias circunscritas a ambos triángulos, O y N, con tales puntos medios y el centro de homotecia M, son homotéticos , por lo que M, N y O están alineados y las circunferencias son tangentes en M.*

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla. España.