

Problema n°938

Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω e incentro I .

Una línea ℓ intersecta las líneas AI , BI , y CI en los puntos D , E y F , respectivamente, distintos de los puntos A , B , C , y I .

Las mediatrices de los segmentos AD , BE y CF respectivamente determinan un triángulo Θ .

Muestre que el circuncírculo del triángulo Θ es tangente a Ω .

Mathematical Ashes (2019): UK-Australia, problema 3.

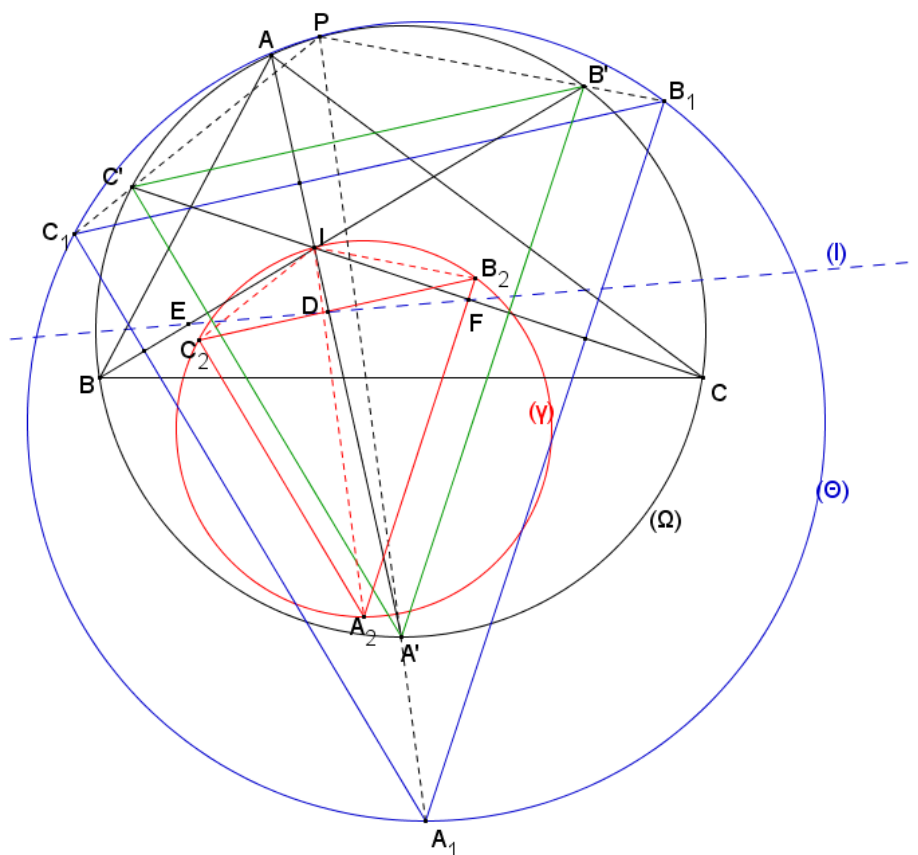
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

On désigne par :

A' , B' et C' les points d'intersection des bissectrices $[AI]$, $[BI]$ et $[CI]$ avec le cercle (Ω) .

A_1 , B_1 et C_1 les points d'intersection des médiatrices des segments BE , CF et AD qui déterminent le triangle $A_1B_1C_1$ et son cercle circonscrit (Θ)

A_2 , B_2 et C_2 les points d'intersection des perpendiculaires passant par E , F et D aux bissectrices $[BI]$, $[CI]$ et $[AI]$



Lemme n°1 : les triangles $A'B'C'$, $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont homothétiques.

Démonstration : par construction les droites $[B_1C_1]$ et $[B_2C_2]$ sont perpendiculaires à la bissectrice $[AI]$. Par ailleurs B' et C' étant les milieux des arcs AC et AB ne contenant pas B et C , la droite $[B'C']$ est médiatrice du segment AI . Les droites $[B'C']$, $[B_1C_1]$ et $[B_2C_2]$ sont donc parallèles. Il en est de même des droites $[C'A']$, $[C_1A_1]$ et $[C_2A_2]$ et des droites $[A'B']$, $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$.

Il en résulte que le point P à l'intersection des droites $[A'A_1]$, $[B'B_1]$ et $[C'C_1]$ est le centre d'homothétie des triangles $A'B'C'$ et $A_1B_1C_1$.

Pour démontrer que le cercle (Θ) est tangent au cercle (Ω) , il suffit de prouver que le point P appartient au cercle (Ω) aussi bien qu'au cercle (Θ) .

Lemme n°2 : les quatre points A_2, B_2, C_2 et I sont cocycliques.

Démonstration : par construction la droite (l) qui contient les points D,E,F est la droite de Simson du point I relativement au triangle $A_2B_2C_2$. Les quatre points A_2, B_2, C_2 et I sont alors sur un même cercle (γ). On en déduit les relations d'angles $\angle A_2C_2B_2 = \angle A_2IB_2$.

Lemme n°3 : on a les égalités vectorielles $\overrightarrow{IA_2} = 2\overrightarrow{A'A_1}$, $\overrightarrow{IB_2} = 2\overrightarrow{B'B_1}$ et $\overrightarrow{IC_2} = 2\overrightarrow{C'C_1}$.

Démonstration : il suffit de démontrer la première relation $\overrightarrow{IA_2} = 2\overrightarrow{A'A_1}$.

On désigne par d_A, d_B , et d_C les distances qui séparent respectivement les droites $[B'C']$ et $[B_1C_1]$, puis les droites $[C'A']$ et $[C_1A_1]$ et enfin les droites $[A'B']$ et $[A_1B_1]$,

Comme les droites $[B'C']$ et $[B_1C_1]$ sont respectivement médiatrices de AI et de AD, on a $ID = 2d_A$. De la même manière on a $IE = 2d_B$ et $IF = 2d_C$.

Le vecteur $\overrightarrow{IA_2}$ se projette sur les bissectrices $[BI]$ et $[CI]$ en $IE = 2d_B$ et $IF = 2d_C$ tandis que le vecteur $\overrightarrow{A'A_1}$ se projette sur ces mêmes droites en deux segments de longueurs d_B et d_C .

L'angle que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{A'A_1}$ et $\overrightarrow{B'B_1}$ n'est autre que $\angle A'PB'$. Il en résulte que $\angle A'PB'$ est égal à l'angle que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{IA_2}$ et $\overrightarrow{IB_2} = \angle A_2IB_2$.

On a les relations d'angles $\angle A'PB' = \angle A_2IB_2 = \angle A_2C_2B_2 = \angle A'C'B'$. Le point P appartient au cercle (Ω) de même qu'à partir de la relation d'angles $\angle A_1PB_1 = \angle A_1C_1B_1$, P appartient au cercle (Θ).

Par l'homothétie de centre P et de rapport $PA_1/PA' = PB_1/PB' = PC_1/PC'$, le cercle (Θ) est donc le transformé du cercle (Ω)

Conclusion : Les cercles (Θ) et (Ω) sont tangents au point P.