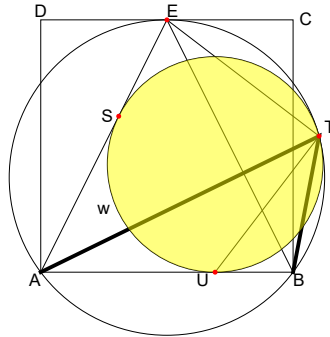


## Pr. Cabri 939

### Enunciado

Out[281]=



ABCD es un cuadrado cualquiera.  $DE=EC$

w es el incírculo del A-triángulo mixtilíneo ABE

S, T, U son sus puntos de contacto.

Mostrar que

\* TE y TU perpendiculares,  $\angle ATU = \angle UTB$  así que (TE, TU, TA, TB) es un haz armónico

\*  $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$

\*  $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE}$

\*  $\frac{TA}{TE} = \frac{AS}{SE} = \frac{AE}{AS} = \phi$

Propuesto por Ercole Suppa

### Solución

de César Beade Franco

Consideremos el cuadrado de vértices  $A(-1,-1)$ ,  $B(1,-1)$ ,  $C(1,1)$  y  $D(-1,1)$ .

Entonces  $E=(0,1)$  y w es una circunferencia de Apolonio de las rectas AB y AE y la circunferencia ABE de centro  $(0, -\frac{1}{4})$  y radio  $\frac{5}{4}$ .

Así obtenemos  $w[(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-7+3\sqrt{5})), \frac{1}{2}(-5+3\sqrt{5})]$  (1).

Los puntos de contacto de esta circunferencia con el triángulo mixtilíneo son

$S(\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}), -2+\sqrt{5})$ ,  $T(\frac{1}{6}(5+\sqrt{5}), \frac{1}{3}(-2+\sqrt{5}))$  y  $U(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), -1)$ .

\*  $TE \cdot TU = (T-E) \cdot (T-U) = (\frac{1}{6}(5+\sqrt{5}), \frac{1}{3}(-5+\sqrt{5})) \cdot (\frac{2}{3}(-1+\sqrt{5}), \frac{1}{3}(1+\sqrt{5})) = 0 \Leftrightarrow$  TE y TU perp.

De aquí deducimos que TU corta a la circunferencia AEB en F punto diametralmente opuesto de E y punto medio del arco AB, así que TU es la bisectriz interior de  $\angle ATB$  y TE la exterior. Así que la cuaterna (E,  $P=TU \cap EB$ ,  $Q=TA \cap EB$ , B) sobre la recta EB es armónica y por tanto el haz (TE, TU, TA, TB) También lo es.

\*\*  $TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB = \frac{2}{3}(5-\sqrt{5}) = TU^2$

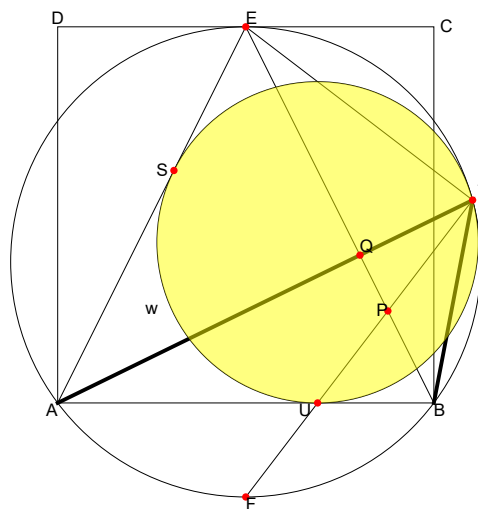
\*\*\*  $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE} \Leftrightarrow (TA+TB)TE = 2TA \cdot TB$ .

Un cálculo nos da  $(TA+TB)TE = \frac{5}{3}(1+\sqrt{5}) = 2TA \cdot TB$

$$**** \frac{TA}{TE} = \frac{|A-T|}{|E-T|} = \frac{\left|(-1,-1)-\frac{1}{6}(5+\sqrt{5}), \frac{1}{3}(-2+\sqrt{5})\right|}{\left|(0,1)-\frac{1}{6}(5+\sqrt{5}), \frac{1}{3}(-2+\sqrt{5})\right|} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) = \phi$$

Y de manera análoga se obtiene  $\frac{AS}{SE} = \frac{AE}{AS} = \phi$

Out[276]=



(1) Calculada con *Mathematica*, lo mismo que los puntos de contacto.