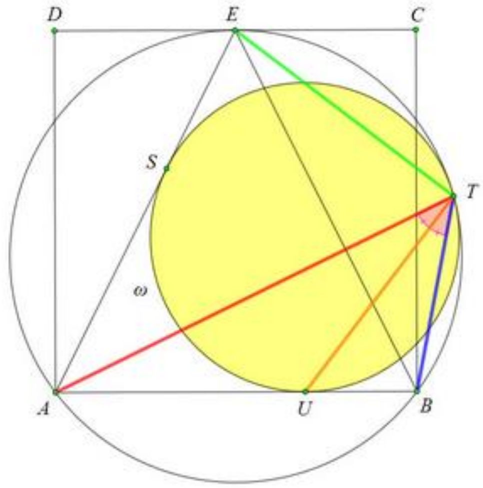
Propuesto por Ercole Suppa.

Problema 939

- ⋆ $ABCD$ any square, $DE = EC$
- ⋆ $\omega = A-$ mixtilinear incircle of ABE
- ⋆ S, T, U touch points

Prove that:

- $TE \perp TU$, $\angle ATU = \angle UTB$
  so (TE, TU, TA, TB) is an harmonic bundle
- $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$
- $\dfrac{1}{TA} + \dfrac{1}{TB} = \dfrac{2}{TE}$
- $\dfrac{TA}{TE} = \dfrac{AS}{SE} = \dfrac{AE}{AS} = \varphi$ *(golden ratio)*



ERCOLE SUPPA 28/2/2020

Suppa, E. (2020): Comunicación personal.

Solución del director

Sea A(0,0), B(a,0), E($\frac{a}{2}$,a). AE=$\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$

La mediatriz de AB es x=$\frac{a}{2}$, la mediatriz de AE es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5a}{8}$.

Así, el centro de la circunferencia circunscrita a AEB es O($\frac{a}{2}$,$\frac{3a}{8}$)

El radio de la misma es $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{3a}{8})^2} = \frac{5a}{8}$

Y la ecuación por tanto es $x^2 - ax + y^2 - \frac{3a}{4}y$=0

El centro V de la circunferencia mixtilínea es la intersección de la parábola de centro O($\frac{a}{2}$,$\frac{3a}{8}$) y directriz $y = \frac{5a}{8}$ con la bisectriz del ángulo EAB.

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3a}{8}\right)^2 = (y - \frac{5a}{8})^2, es\ la\ ecuación\ de\ la\ parábola.$$

Es decir, $x^2 - ax + \frac{a}{2}y = 0$

Busquemos la ecuación de la bisectriz. Si consideramos el triángulo EAM, siendo M el punto medio de AB, el pie W de la bisectriz en el lado EM es : $MW = \frac{a\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{a}{1+\sqrt{5}}$, $W(\frac{a}{2}, \frac{a}{1+\sqrt{5}})$

Luego la ecuación de la bisectriz es $y = \frac{2x}{1+\sqrt{5}}$

Así V será la intersección de , $x^2 - ax + \frac{a}{2}y = 0$ con $y = \frac{2x}{1+\sqrt{5}}$

Es $x^2 - ax + \frac{a}{2}\frac{2x}{1+\sqrt{5}} = 0$, o sea $x^2 + \sqrt{5}x^2 - ax - ax\sqrt{5} + ax = 0$. Que tiene dos soluciones:

x=0, x=$\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. Luego Es V($\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, \frac{2\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$) , V($\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, \frac{a\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$)

Y el radio r de la misma es r=$\frac{a\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Y la ecuación de la mixtilínea es por tanto,

$$x^2 - \frac{2a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}x + \frac{5a^2}{6+2\sqrt{5}} + y^2 - \frac{2a\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}y = 0$$

La solución de las ecuaciones de ambas circunferencias nos da el eje radical

$x^2 - ax + y^2 - \frac{3a}{4}y$=0 , $x^2 - \frac{2a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}x + \frac{5a^2}{6+2\sqrt{5}} + y^2 - \frac{2a\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}y = 0$

$$y = \frac{-8}{9-5\sqrt{5}}x - \frac{10\,a}{9-5\sqrt{5}}$$

La ecuación de la recta que contiene los dos centros es perpendicular al eje radical y contiene a O($\frac{a}{2}, \frac{3a}{8}$)$, y$V($\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, \frac{a\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$) es

$$y = \frac{3a}{8} + \frac{5\sqrt{5}-9}{8}(x - \frac{a}{2})$$

Por ello para estudiar el punto T hemos de resolver la ecuación

$$\frac{-8}{9-5\sqrt{5}}x - \frac{10\,a}{9-5\sqrt{5}} = \frac{3a}{8} + \frac{5\sqrt{5}-9}{8}(x - \frac{a}{2})$$

Que da lugar a

128x-160a=-75$\sqrt{5}a + 90\,\sqrt{5}x - 250x + 125a + 135a - 162x + 90\sqrt{5}x - 45\sqrt{5}a$

O sea, $x(540 - 180\sqrt{5}) = a(420 - 120\sqrt{5}) \to x = \frac{420-120\sqrt{5}}{540-180\sqrt{5}} = \frac{11+\sqrt{5}}{12}a,$

De donde y=$\frac{3a}{8} + \frac{5\sqrt{5}-9}{8}\left(\frac{11+\sqrt{5}}{12}a - \frac{a}{2}\right) = \frac{36+55\sqrt{5}+25-99-9\sqrt{5}-30\sqrt{5}+54}{96}a = \frac{16+16\sqrt{5}}{96}a = \frac{1+\sqrt{5}}{6}a$

La intersección de ambas rectas es T($\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{1+\sqrt{5}}{6}a$)

i) TE$\perp$ TU

T$(\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{1+\sqrt{5}}{6}a)$, E$(\frac{a}{2}$,a), U$(\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 0)$.

Para ver la propiedad tomemos

T$(\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{2+2\sqrt{5}}{12}a)$, E$(\frac{6}{12}a, \frac{12}{12}a)$, U$(\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a, 0)$.

$\overrightarrow{ET}$ $(\frac{5+\sqrt{5}}{12}a, \frac{-10+2\sqrt{5}}{12}a$); $\overrightarrow{TU}(\frac{4-4\sqrt{5}}{12}a, \frac{-2-2\sqrt{5}}{12}a)$

Siendo $\overrightarrow{ET}\,\overrightarrow{TU} = \frac{20-20\sqrt{5}+4\sqrt{5}-20+20+20\sqrt{5}-4\sqrt{5}-20}{144}a^2 = 0$, luego c.qd. TE⊥ TU

2) $\angle ATU = \angle UTB$

T$(\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{2+2\sqrt{5}}{12}a)$ U$(\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 0) = (\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a$,0), A(0,0), B(a,0)

TA=$\frac{\sqrt{121+5+22\sqrt{5}+4+20+8\sqrt{5}}}{\sqrt{144}}a = \frac{\sqrt{30}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a$

$$TB = \frac{\sqrt{1+5-2\sqrt{5}+4+20+8\sqrt{5}}}{\sqrt{144}}a = \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a$$

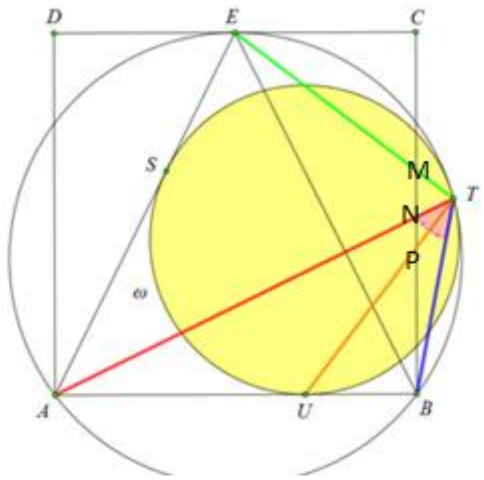
AB=a, AU=$AU = \frac{15-3\sqrt{5}}{12}a, UB = \frac{3\sqrt{5}-3}{12}a$

$$\frac{TB}{BU} = \frac{\frac{\sqrt{6}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a}{\frac{3\sqrt{5}-3}{12}a} = \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}-3} = \frac{3(\sqrt{30}+\sqrt{6})(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{36} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{12}$$

$$\frac{TA}{AU} = \frac{\frac{\sqrt{30}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a}{\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a} = \frac{\sqrt{30}(15+3\sqrt{5})(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{225-45} = \frac{\sqrt{6}(15\sqrt{5}+15)(\sqrt{5+\sqrt{5}}}{180}$$
$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{12}$$

Luego c.q.d., $\angle ATU = \angle UTB$

3)(TE, TU, TA, TB) es una cuaterna armónica.



Tomemos la recta CB como transversal.

Sea $M = TE \cap CB$

Es AB x=a.

TE: T($\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{2+2\sqrt{5}}{12}a$) E($\frac{a}{2}$,a).

Luego $\frac{y-a}{\frac{2+2\sqrt{5}}{12}a-a} = \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{11+\sqrt{5}}{12}a-\frac{a}{2}}$

Para x=a, tenemos $\frac{y-a}{\frac{\sqrt{5}-5}{6}} = \frac{\frac{2a-a}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{12}a}$

Es decir, y=$\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+5}a + a, por\ lo\ que\ y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$

Así es $M(a, \frac{\sqrt{5}-1}{2}a)$

Sea $N = TA \cap CB$

La ecuación de la recta que contiene a T($\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{2+2\sqrt{5}}{12}a$), y a A(0,0), es

$$\frac{y-0}{\frac{2+2\sqrt{5}}{12}a} = \frac{x-0}{\frac{11+\sqrt{5}}{12}a-0}\ Es\ decir, y = \frac{2+2\sqrt{5}}{11+\sqrt{5}}x$$

Para x=a, que es la ecuación de la recta que contiene a ByC, tenemos

$y = \frac{2+2\sqrt{5}}{11+\sqrt{5}}a = \frac{3+5\sqrt{5}}{29}a$

Así, $N(a, \frac{3+5\sqrt{5}}{29}a)$

Para TU, tenemos:

T($\frac{11+\sqrt{5}}{12}a, \frac{1+\sqrt{5}}{6}a$) , U($\frac{a\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, 0) = U(\frac{5-\sqrt{5}}{4}a, 0)$

Así, la recta que contiene T, U es:

$$\frac{y-\frac{1+\sqrt{5}}{6}a}{0-\frac{1+\sqrt{5}}{6}a}=\frac{x-\frac{11+\sqrt{5}}{12}a}{\frac{5-\sqrt{5}}{4}a-\frac{11+\sqrt{5}}{12}a}$$

Es decir, $y=\frac{1+\sqrt{5}}{6}a-\frac{1+\sqrt{5}}{6}a+\frac{\frac{12x-11a-\sqrt{5}a}{12}}{\frac{4-4\sqrt{5}}{12}a}$

O sea, para x=a, que es la ecuación de la recta CB.

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{6}a-\frac{1+\sqrt{5}}{6}a\frac{\frac{12a-11a-\sqrt{5}a}{12}}{\frac{4-4\sqrt{5}}{12}a}\to y=\frac{1+\sqrt{5}}{8}a$$

Así, $TU\cap CB=P(a,\frac{1+\sqrt{5}}{8}a)$

Es MB=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, NP=$\frac{-5+11\sqrt{5}}{29\ 8}a$ MN=$\frac{19\sqrt{5}-35}{2\ 29}a$ PB=$\frac{1+\sqrt{5}}{8}a$

Luego MB NP=$\frac{55+5-16\sqrt{5}}{2\ 29\ 8}$=$\frac{60-16\sqrt{5}}{464}$, y MN PB=$\frac{95-35-35\sqrt{5}+19\sqrt{5}}{2\ 29\ 8}=\frac{60-16\sqrt{5}}{464}$, c.q.d.

4) $TU^2=TE^2+TB^2-TE\,TB$

Tenemos :

$\overrightarrow{TU}=\left(\frac{4-4\sqrt{5}}{12}a,\frac{-2-2\sqrt{5}}{12}a\right)\to TU^2=\frac{a^2}{144}(16+80-32\sqrt{5}+4+20+8\sqrt{5})$

O sea, $TU^2=\frac{a^2}{144}\left(120-24\sqrt{5}\right)=\frac{a^2}{6}\left(5-\sqrt{5}\right)$

$$\overrightarrow{TE}=\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{12}a,\frac{10-2\sqrt{5}}{12}\right)\to\ ET^2=\frac{25+5+10\sqrt{5}+100+20-40\sqrt{5}}{144}a^2$$

O sea, $TE^2=\frac{a^2}{144}\left(150-30\sqrt{5}\right)=\frac{a^2}{24}5(5-\sqrt{5})$

$$TB=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a\to TB^2=\frac{a^2}{24}(5+\sqrt{5})$$

$$TE\,TB=\sqrt{\frac{a^2}{24}5(5-\sqrt{5})}\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a$$

Es decir,

$$TE\ TB = \sqrt{\frac{a^2}{24}5(5-\sqrt{5})}\frac{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a$$

$$TE\ TB = \frac{a^2}{24}\sqrt{5(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} = \frac{5\,a^2}{12}$$

Así hemos se comprobar que

$$\frac{a^2}{6}\left(5-\sqrt{5}\right) = \frac{a^2}{24}5\left(5-\sqrt{5}\right) + \frac{a^2}{24}\left(5+\sqrt{5}\right) - \frac{5\,a^2}{12}$$

Es decir, $\frac{a^2}{24}5\left(5-\sqrt{5}\right) + \frac{a^2}{24}\left(5+\sqrt{5}\right) - \frac{5\,a^2}{12} = \frac{25-5\sqrt{5}+5+\sqrt{5}-10}{24}a^2 = \frac{20-4\sqrt{5}}{24}a^2$

Lo que nos da la igualdad pedida.

5)

$$\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE}$$

$$\frac{1}{TA} = \frac{1}{\frac{\sqrt{30}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a} = \frac{12\sqrt{30}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{30\ 20\ a}$$

$$\frac{1}{TA} = \frac{\sqrt{30}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{50\ a}$$

$$\frac{1}{TB} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{24}(5+\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{24}\sqrt{5+\sqrt{5}}(5-\sqrt{5})}{20a}$$

$$\frac{1}{TB} = \frac{\sqrt{24}\sqrt{5+\sqrt{5}}(5-\sqrt{5})}{20a} = \frac{5\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}(5-\sqrt{5})}{50a}$$

$$\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{\sqrt{6}(5+\sqrt{5})\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{50\ a}$$

$$\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{20\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{50\ a} = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5\ a}$$

$$\frac{2}{TE}=\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{24}5(5-\sqrt{5})}}=\frac{2\sqrt{24}}{a\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{24}(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{a\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$

$$\frac{2}{TE}=\frac{4\sqrt{6}(\sqrt{5+\sqrt{5}})}{a\sqrt{5}\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5\,a}$$

Luego se verifica la igualdad.

6)

$$\frac{TA}{TE}=\frac{\frac{\sqrt{30}\,\sqrt{5+\sqrt{5}}}{12}a}{\sqrt{\frac{a^2}{24}5(5-\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

$$\frac{AS}{SE}=\frac{AU}{AE-AU}=\frac{\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a}=\frac{15-3\sqrt{5}}{9\sqrt{5}-15}=\frac{5-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}$$

$$\frac{AS}{SE}=\frac{5-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}=\frac{25-15+15\sqrt{5}-5\sqrt{5}}{45-25}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

$$\frac{AE}{AS}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{15-3\sqrt{5}}{12}a}=\frac{6\sqrt{5}}{15-3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}(5+\sqrt{5})}{25-5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$$

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla. España