

★ $ABCD$ any square, $DE = EC$

★ $\omega = A$ - mixtilinear incircle of ABE

★ S, T, U touch points

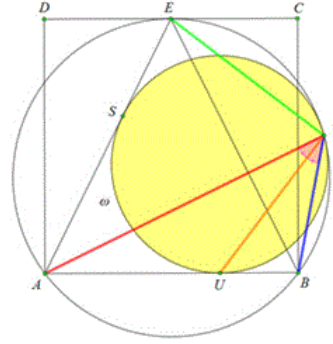
Prove that:

♦ $TE \perp TU$, $\angle ATU = \angle UTB$
so (TE, TU, TA, TB) is an harmonic bundle

♦ $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$

♦ $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE}$

♦ $\frac{TA}{TE} = \frac{AS}{SE} = \frac{AE}{AS} = \varphi$ (golden ratio)



ERCOLE SUPPA 28/2/2020



Dado el cuadrado de vértices $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$
Sea $E = (\frac{1}{2}, 1)$ el punto medio de DC
Si consideramos el triángulo ABE . Tenemos

$$\begin{aligned} AE = EB &= \frac{\sqrt{5}}{2} & S_{ABE} &= \frac{1}{2} \\ \alpha = \text{ang}(BAE); \cos \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} & \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \\ \sec^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{10}{5+\sqrt{5}} & \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Vamos a calcular las coordenadas de su circuncentro

Mediatriz de $AB \Rightarrow med_{AB} \equiv x = \frac{1}{2}$

Mediatriz de AE . Recta perpendicular al lado AE que pasa por su punto medio S

$$\left. \begin{aligned} 2\overrightarrow{AE} &= (1, 2) \\ S &= (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x - \frac{1}{4}) + 2(y - \frac{1}{2}) = 0$$

$$med_{AE} \equiv x + 2y - \frac{5}{4} = 0$$

El circuncentro O es el punto de intersección de ambas rectas

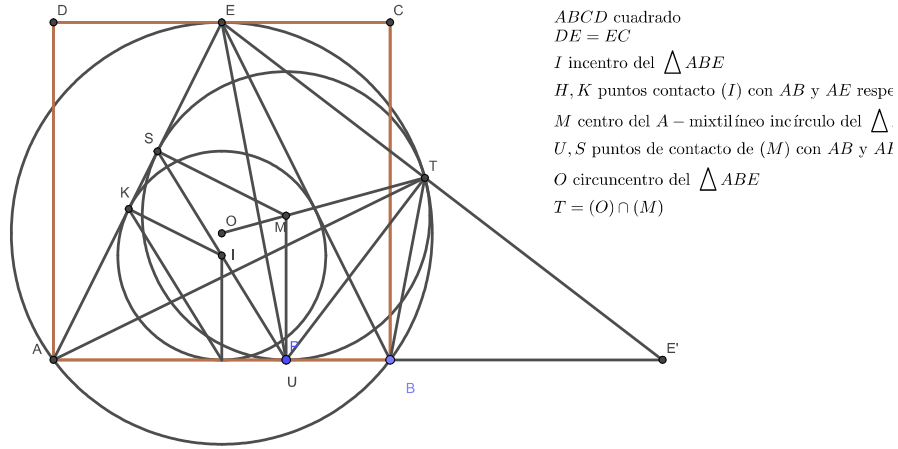
$$\begin{aligned} O &= med_{AB} \cap med_{AE} \left\{ \begin{aligned} x + 2y - \frac{5}{4} &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \\ O &\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8} \right) \end{aligned}$$

Como el radio del circuncírculo del triángulo ABE

$$R = \frac{AB \cdot AE \cdot EB}{4S} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$

La ecuación del circuncírculo (O) es

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{3}{8} \right)^2 = \frac{25}{64}$$



El semiperímetro del triángulo ABE es $semip_{ABE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

El radio del incírculo del $\triangle ABE$ cuyo centro es I es $r_{(I)} = \frac{S_{ABE}}{semip_{ABE}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Si H, K son los puntos de contacto del incírculo cuyo centro es I ; entonces

$$AH = semip_{ABE} - BE = \frac{1}{2} = AK$$

Los puntos H, K e I tienen de coordenadas

$$H\left(\frac{1}{2}, 0\right), K\left(\frac{1}{2} \cos \alpha, \frac{1}{2} \sin \alpha\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right)$$

Sea ϖ el A - *mixtilinear incírculo* del $\triangle ABE$ cuyo centro denominamos M . Sabemos que si U, S puntos de contacto de ϖ con los lados AB y AE respectivamente; entonces

$$AU = AH \cdot \sec^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{10}{5 + \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{4} = AS$$

Su radio es

$$r_{(M)} = AU \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}$$

Las coordenadas de los puntos U, S y M son

$$U = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}, 0\right), S = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right), M = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}, \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}\right)$$

La ecuación de ϖ es

$$\left(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^2$$

El único punto T , en común entre (O) e (I) lo determinamos resolviendo el sistema

$$T = (O) \cap (I) \equiv \begin{cases} \left(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} \end{cases}$$

$$T\left(\frac{\sqrt{5} + 11}{12}, \frac{\sqrt{5} + 1}{6}\right)$$

Calculemos ahora los segmentos EU, ET, TU, AT, TB

$$\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ U\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}, 0\right) \\ T\left(\frac{\sqrt{5}+11}{12}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) \\ B(1, 0) \\ A(0, 0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{EU} = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}, 0\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}, -1\right) \\ \overrightarrow{ET} = \left(\frac{\sqrt{5}+11}{12}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{\sqrt{5}+5}{12}, \frac{\sqrt{5}-5}{6}\right) \\ \overrightarrow{UT} = \left(\frac{\sqrt{5}+11}{12}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) \\ \overrightarrow{BT} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{12}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) \\ \overrightarrow{AT} = \left(\frac{\sqrt{5}+11}{12}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} EU^2 &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{15}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{5} \\ ET^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}+5}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-5}{6}\right)^2 = \frac{25-5\sqrt{5}}{24} \\ UT^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{5} \\ TB^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+5}{24} \\ TA^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}+11}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)^2 = \frac{5(\sqrt{5}+5)}{24} \end{aligned}$$

- $UT^2 + ET^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{5} + \frac{25-5\sqrt{5}}{24} = \frac{15}{8} - \frac{3}{8}\sqrt{5} = EU^2$ es evidente que $\boxed{TE \perp ET}$

Vamos ahora a determinar $\boxed{TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB = UT^2}$

- $TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB = \frac{25-5\sqrt{5}}{24} + \frac{\sqrt{5}+5}{24} - \sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}}{24}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{24}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{5} - \frac{5}{12} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{5} = UT^2$
- $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \sqrt{\frac{24}{5(\sqrt{5}+5)}} + \sqrt{\frac{24}{\sqrt{5}+5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sqrt{\sqrt{5}+5}$
 $\frac{2}{TE} = 2\sqrt{\frac{24}{5(5-\sqrt{5})}} = 4\sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{25-5\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sqrt{\sqrt{5}+5} \Rightarrow \frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE}$
- $\frac{TA}{TE} = \sqrt{\frac{25+5\sqrt{5}}{25-5\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
- $\frac{AS}{SE} = \frac{AS}{AE-AS} = \frac{\frac{5-\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-5-\sqrt{5}}{4}} = \frac{5-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
- $\frac{AE}{AS} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5-\sqrt{5}}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$
- Dado el triángulo ATB vamos a demostrar que TU es la bisectriz interior del ángulo $\widehat{T}$

Bastará con comprobar que se verifica el teorema de la bisectriz

$$\begin{aligned} TB \cdot AU &= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{24}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+5)(5-\sqrt{5})^2}{24}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{5}} \\ AT \cdot UB &= \sqrt{\frac{5(\sqrt{5}+5)}{24}} \left(1 - \frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Como $TB \cdot AU = AT \cdot UB \iff \frac{TB}{UB} = \frac{AT}{AU}$:entonces; podemos afirmar que _

$$\widehat{ATU} = \widehat{UTB}$$

(TE, TU, TA, TB) es una "harmonic bundle cuando la recta AB que corta a las cuatro rectas TE, TU, TA, TB en los puntos E', U, A, B lo hace de forma que se verifique que $(A, B; E', U)$ formen una cuaterna armónica

Es decir que:

El producto de las longitudes de los segmentos extremos (el segmento total AE' y el segmento interior UB), es igual al producto de las longitudes de los segmentos intermedios (AU y BE')

$$AE' \cdot BU = AU \cdot BE'$$

Vamos a calcular en primer lugar E'

La recta TE tiene de vector director $12 \cdot \overrightarrow{TE} = (5 + \sqrt{5}, 2\sqrt{5} - 10)$. Su ecuación cartesiana es

$$(10 - 2\sqrt{5})(x - \frac{1}{2}) + (5 + \sqrt{5})(y - 1) = 0$$

Dicha recta corta al eje de las X ($y = 0$) en el punto E' de coordenadas

$$E' \left(\frac{1}{2} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{4}, 0 \right)$$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{l} AE' = \frac{\sqrt{5}+5}{4} \\ BU = \left| 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{4} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{array} \right] \text{ y } \left[\begin{array}{l} AU = \frac{5-\sqrt{5}}{4} \\ BE' = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array} \right] \text{ entonces}$$

$$AE' \cdot BU = AU \cdot BE' \text{ c.q.d}$$