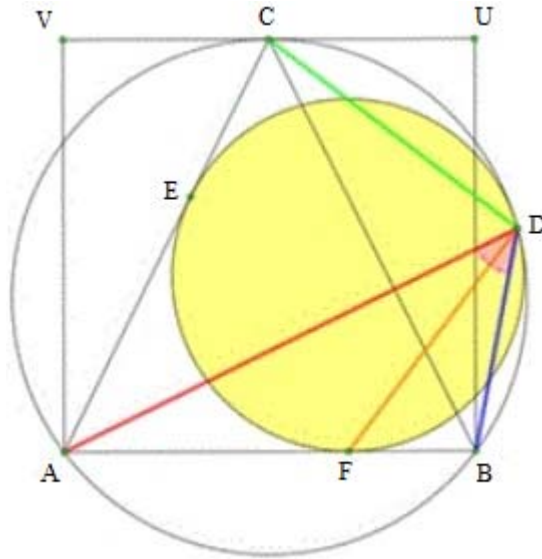


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 939. (propuesto por Ercole Suppa) Dado un cuadrado $ABUV$, se consideran el punto medio C del segmento UV y los puntos D , E y F de tangencia entre el incírculo mixtilinear correspondiente al vértice A del triángulo ABC y el circuncírculo de dicho triángulo y las rectas AC y AB , respectivamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

- ① $CD \perp DF$
- ② $\triangle ADF = \triangle FDB$
- ③ (DC, DF, DA, DB) es una cuaterna armónica de rectas.
- ④ $DF^2 = DC^2 + DB^2 - DC \cdot DB$
- ⑤ $\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} = \frac{2}{DC}$
- ⑥ $\frac{DA}{DC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AC}{AE} = \phi$

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que $UC = 1$, por lo que:

$$\begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = 2 \\ S_B = 2 \\ S_C = 3 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas respecto del triángulo ABC , como la recta que pasa por el incentro del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A :

$$(5 + \sqrt{5})x - (1 + \sqrt{5})y - 2\sqrt{5}z = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilinear, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} E = (2\sqrt{5} : 0 : 5 + \sqrt{5}) \\ F = (1 + \sqrt{5} : 5 + \sqrt{5} : 0) \end{cases}$$

Por otro lado, como la ecuación del incírculo mixtilinear es de la forma:

$$5yz + 5xz + 4xy - (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0 \quad (u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos E y F y sea tangente a la recta AC en el punto E (o a la recta AB en el punto F , da igual), obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \frac{20}{(1 + \sqrt{5})^2} \\ v = \frac{4}{(1 + \sqrt{5})^2} \\ w = \frac{5(\sqrt{5} - 1)^2}{(1 + \sqrt{5})^2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de esta circunferencia es:

$$(1 + \sqrt{5})^2(5yz + 5xz + 4xy) - [20x + 4y + 5(\sqrt{5} - 1)^2z](x + y + z) = 0$$

siendo su intersección con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC :

$$4yz + 5xz + 5xy = 0$$

el punto $D = (-\sqrt{5} : 5 : 1 + \sqrt{5})$. Una vez aclarado todo esto:

① Como:

$$\begin{cases} CD_{\infty} = (\sqrt{5} : -5 : 5 - \sqrt{5}) \\ DF_{\infty} = (4 + 3\sqrt{5} : -\sqrt{5} : -4 - 2\sqrt{5}) \end{cases}$$

entonces:

$$CD_{\infty} \cdot DF_{\infty} = 2\sqrt{5}(4 + 3\sqrt{5}) + 2(-5)(-\sqrt{5}) + 3(5 - \sqrt{5})(-4 - 2\sqrt{5}) = 0$$

por lo que:

$$CD \perp DF$$

② Como:

$$\begin{cases} DA \equiv 0 = (1 + \sqrt{5})y - \sqrt{5}z \\ DF \equiv 0 = (5 + 3\sqrt{5})x - (3 + \sqrt{5})y + 5(1 + \sqrt{5})z \\ DB \equiv 0 = (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5}z \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

si llamamos S al doble del área del triángulo ABC , entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\cot(\triangle ADF)} = \frac{2(8+6\sqrt{5})(-6-\sqrt{5})+2(-2\sqrt{5})5+3(1+\sqrt{5})(-8-4\sqrt{5})}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5+3\sqrt{5} & -(3+\sqrt{5}) & 5(1+\sqrt{5}) \\ 0 & 1+\sqrt{5} & -5 \end{vmatrix}} = -8 \\ S_{\cot(\triangle FDB)} = \frac{2\sqrt{5}(8+6\sqrt{5})+2(-2\sqrt{5})+3(1+\sqrt{5})(8+4\sqrt{5})}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 5+3\sqrt{5} & -(3+\sqrt{5}) & 5(1+\sqrt{5}) \end{vmatrix}} = -8 \end{array} \right.$$

por lo que:

$$\cot(\triangle ADF) = \cot(\triangle FDB)$$

y, por tanto:

$$\triangle ADF = \triangle FDB$$

③ Si llamamos J al punto de intersección entre las rectas CD y AB , como:

$$DC \equiv \sqrt{5}x + y = 0$$

entonces, $J = (-1 : \sqrt{5} : 0)$, por lo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} AF^2 = \frac{5(3-\sqrt{5})}{2} \\ BF^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ AJ^2 = \frac{5(3+\sqrt{5})}{2} \\ BJ^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{AJ}{AF}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{BJ}{BF}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AJ}{AF} = -\frac{BJ}{BF} \Rightarrow (J, F; A, B) = -1$$

y, por tanto, $(DC, DF, DA, DB) = (DJ, DF, DA, DB)$ es una cuaterna armónica de rectas.

④ Como:

$$\left\{ \begin{array}{l} DF^2 = \frac{2(5+\sqrt{5})}{3} \\ DC^2 = \frac{5(5-\sqrt{5})}{6} \\ DB^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{6} \end{array} \right.$$

entonces:

$$DF^2 - DC^2 - DB^2 + DC \cdot DB = \frac{2(5+\sqrt{5})}{3} - \frac{5(5-\sqrt{5})}{6} - \frac{5+\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{6} = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

por lo que:

$$DF^2 = DC^2 + DB^2 - DC \cdot DB$$

⑤ Como:

$$DA^2 = \frac{5(5 + \sqrt{5})}{6}$$

entonces:

$$\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} - \frac{2}{DC} = \sqrt{\frac{6}{5(5 + \sqrt{5})}} + \sqrt{\frac{6}{5 + \sqrt{5}}} - 2\sqrt{\frac{6}{5(5 - \sqrt{5})}} = 0$$

por lo que:

$$\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB} = \frac{2}{DC}$$

⑥ Como:

$$\begin{cases} AE^2 = \frac{5(3 - \sqrt{5})}{2} \\ EC^2 = \frac{5(7 - 3\sqrt{5})}{2} \end{cases}$$

entonces:

$$\textcircled{1} \quad \frac{DA}{DC} = \sqrt{\frac{\frac{5(5 + \sqrt{5})}{6}}{\frac{5(5 - \sqrt{5})}{6}}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{AE}{EC} = \sqrt{\frac{\frac{5(3 - \sqrt{5})}{2}}{\frac{5(7 - 3\sqrt{5})}{2}}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{5(3 - \sqrt{5})}{2}}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$