

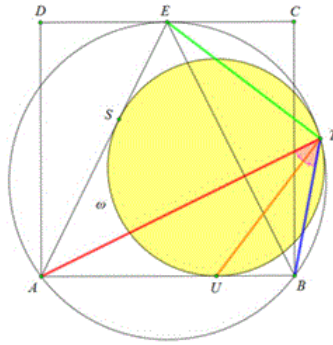
## Problema n°939

Propuesto por Ercole Suppa. Comunicación personal

- ★  $ABCD$  any square,  $DE = EC$
- ★  $\omega = A$  - mixtilinear incircle of  $ABE$
- ★  $S, T, U$  touch points

Prove that:

- $TE \perp TU$ ,  $\angle ATU = \angle UTB$   
so  $(TE, TU, TA, TB)$  is an harmonic bundle
- $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$
- $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} = \frac{2}{TE}$
- $\frac{TA}{TE} = \frac{AS}{SE} = \frac{AE}{AS} = \varphi$  (golden ratio)



ERCOLE SUPPA 28/2/2020



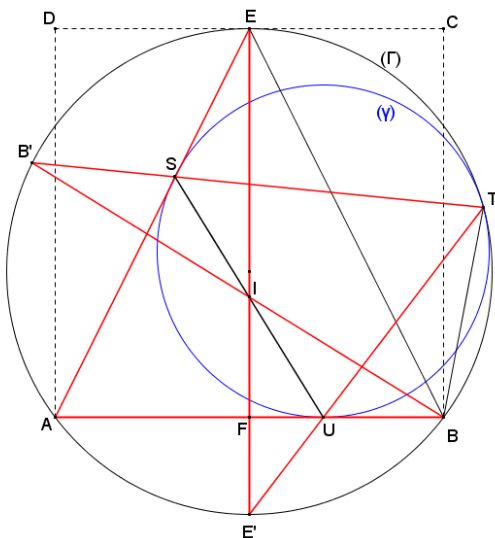
## Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Soient :

( $\Gamma$ ) le cercle circonscrit au triangle isocèle  $EAB$  de sommet  $E$ ,

( $\gamma$ ) le cercle tangent aux côtés  $EA$  et  $AB$  et à ( $\Gamma$ ) respectivement aux points  $U, S$  et  $T$ .

$I$  le centre du cercle inscrit du triangle  $EAB$ .

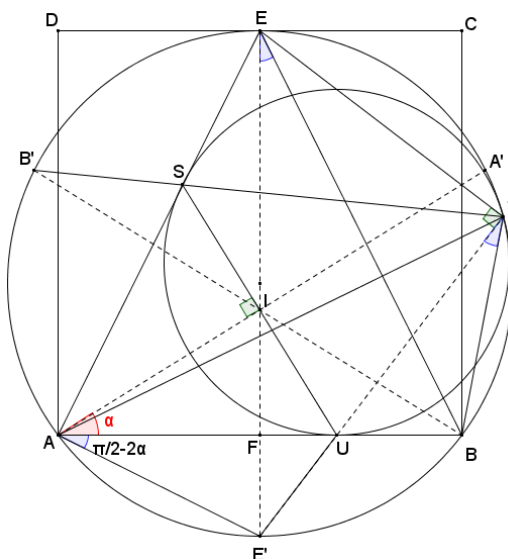


**Lemme : le point  $I$  est le milieu de la corde  $US$  dans le cercle ( $\gamma$ )**

Démonstration : on trace la droite  $TU$  qui coupe le cercle ( $\Gamma$ ) au point  $E'$  et la droite  $TS$  qui coupe ce même cercle au point  $B'$ .

D'après le théorème de la bissectrice intérieure (Jean-Louis Aymé - [A new mixtilinear incircle adventure I](#) pages 9 et 10), on admet que le point  $E'$  est le milieu de l'arc  $AB$  qui ne contient pas  $E$  de même que  $B'$  est le milieu de l'arc  $AE$  qui ne contient pas  $B$ . Les droites  $EE'$  et  $BB'$  sont les bissectrices des angles en  $E$  et  $B$  du triangle  $EAB$  et passent donc par le point  $I$ .

D'après [le théorème de l'hexagramme mystique de Pascal](#) appliqué au polygone  $EABB'TE'$  (tracé en rouge), les points  $U, S$  et  $I$  sont alignés et comme  $I$  est sur la bissectrice de l'angle en  $A$ ,  $I$  est milieu de  $US$ .



On revient à la figure de l'énoncé dans laquelle on désigne par  $F$  le milieu du côté  $AB$  et  $A'$  à l'intersection de la bissectrice  $AI$  avec le cercle ( $\Gamma$ ).  $A'$  est donc le milieu de l'arc  $BE$  ne contenant pas  $A$ .

Sans perte de généralité, on pose  $AB = BC = CD = DA = 2$ .

D'où  $AF = 1$ ,  $AE = BE = \sqrt{5}$ ,  $FE'/AF = FA/FE = 1/2$ .  $FE' = 1/2$ .

$\angle BAA' = \alpha$ . D'où  $\angle AEB = 2 \angle BEE' = \pi - 4\alpha$  et  $\angle BAE' = \pi/2 - 2\alpha$

D'où  $\tan(2\alpha) = AF/FE' = 2$ . Or  $\tan(2\alpha) = \tan(\alpha)/(1 - \tan^2(\alpha))$ .

On pose  $t = \tan(\alpha)$ . D'où l'équation  $t^2 + t - 1 = 0$  qui a pour racine

$t = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$  = nombre d'or.

Les triangles  $AIU$  et  $AIS$  sont rectangles. On en déduit successivement :

$AU = AS = \sqrt{5}/\varphi$ ,  $BU = AB - AU = 1/\varphi$ ,  $SE = AE - AS = \sqrt{5}/\varphi^2$ .

Comme  $\angle BAE' = \angle BTE'$ , les triangles  $AUE'$  et  $TUB$  sont semblables.

D'où les relations **(R)** :

$TU/TB = AU/AE' = 2/\varphi$ ,  $TA/TE = AS/SE = \varphi$ ,  $TA/TB = \sqrt{5}$ ,  $TE/TB = \sqrt{5}/\varphi$

On dispose de tous les éléments pour répondre aux quatre questions de l'énoncé :

1) TE est perpendiculaire à TU et (TE,TU,TA,TB) constitue un faisceau harmonique.  
EE' médiatrice de AB est diamètre du cercle ( $\Gamma$ ). Le triangle ETE' est rectangle en T. TE est donc perpendiculaire à TU. Comme TE' et TB' sont respectivement bissectrices des angles  $\angle ATB$  et  $\angle ATE$  et que  $\angle ETE' = \pi/2$ , (TE,TU,TA,TB) constitue un faisceau harmonique.

2)  $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$

En divisant les deux membres de cette relation par  $TB^2$ , on obtient  $(TU/TB)^2 = (TE/TB)^2 + 1 - (TE/TB)$ .

D'après les relations (R) obtenues supra, on a  $(TU/TB)^2 = 4/\varphi^2$  et  $(TE/TB)^2 + 1 - (TE/TB) = 5/\varphi^2 + 1 - \sqrt{5}/\varphi$ , ce qui revient à comparer  $1/\varphi^2$  à  $\sqrt{5}/\varphi - 1$ . Ces deux termes sont égaux à  $(\sqrt{5} - 1)^2/4$ . C.q.f.d.

3)  $1/TA + 1/TB = 2/TE$ .

En multipliant les deux membres de cette relation par TE, on obtient  $TE/TA + TE/TB = 2$ .

Or d'après les relations (R)  $TE/TA = 1/\varphi$  et  $TE/TB = \sqrt{5}/\varphi$ . D'où  $TE/TA + TE/TB = (1 + \sqrt{5})/\varphi = 2$ . C.q.f.d.

4)  $TA/TE = AS/SE = AE/AS = \varphi$

Les relations (R) donnent  $TA/TE = \varphi$ . Dans le triangle ATE, TS est la bissectrice issue de T. D'où  $AS = SE$  )  $TA/TE = \varphi$ .

Par ailleurs  $AS = \sqrt{5}/\varphi$ . Comme  $AE = \sqrt{5}$ , on en déduit  $AE/AS = \varphi$ . C.q.f.d.