Del 16 de Marzo al 30 de abril de 2020

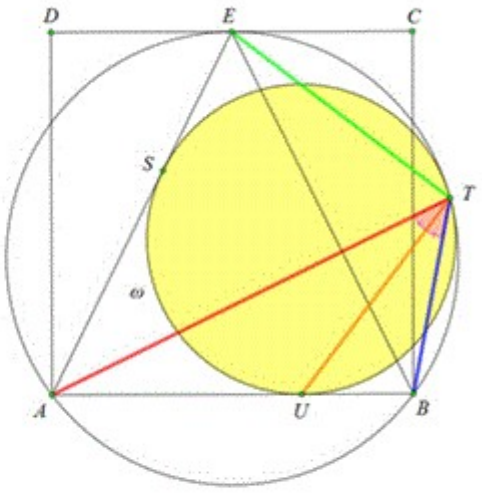
Propuesto por Ercole Suppa.

***Problema* 939**.-

- $ABCD$ any square, $DE = EC$
- $\omega = A-$ mixtilinear incircle of ABE
- S, T, U touch points

Prove that:

- $TE \perp TU$, $\angle ATU = \angle UTB$
  so (TE, TU, TA, TB) is an harmonic bundle
- $TU^2 = TE^2 + TB^2 - TE \cdot TB$
- $\dfrac{1}{TA} + \dfrac{1}{TB} = \dfrac{2}{TE}$
- $\dfrac{TA}{TE} = \dfrac{AS}{SE} = \dfrac{AE}{AS} = \varphi$ *(golden ratio)*

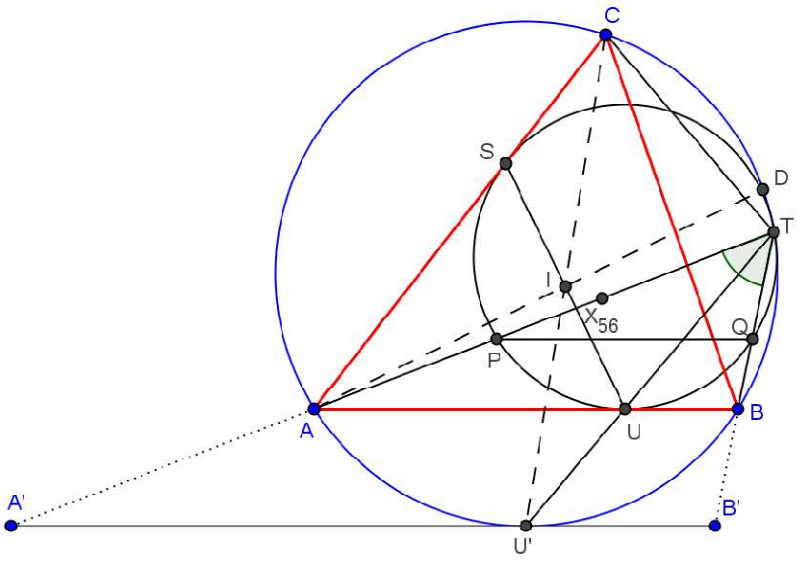


ERCOLE SUPPA 28/2/2020

E. Suppa (2020): Comunicación personal.

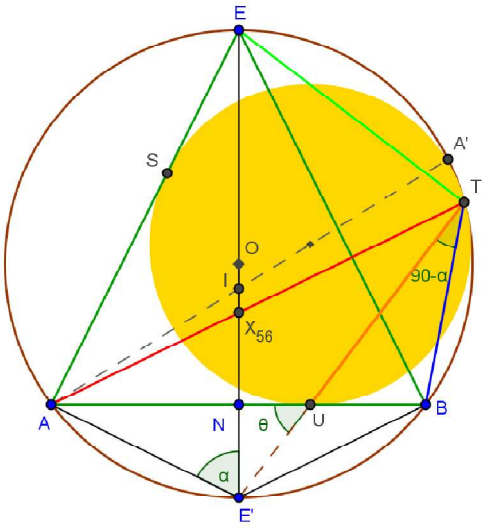
Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1) Sea U' la proyección desde T del punto U sobre la circunferencia circunscrita. Con carácter general, T es el centro de la homotecia que transforma la A-circunferencia mixtilínea en la circunscrita. Por tanto transforma el segmento AB, tangente a la primera, en otro segmento A'B', paralelo a AB y tangente a la segunda (el punto de tangencia es el de la intersección de la bisectriz de A con la circunscrita); el punto de tangencia U y punto medio del arco PQ que no contiene a T, en el punto de tangencia U' y punto medio del arco AB. Por tanto U' está en el extremo de la bisectriz de C y TU es la bisectriz de $\sphericalangle ATB$.



En el caso particular de este problema, el punto C es ahora el E, U' es E' y la bisectriz de $\sphericalangle AEB$ es también un diámetro, por ello se tiene que TE y TU son perpendiculares y, en consecuencia, TE, TU, TA, TB es un haz armónico como se pretendía demostrar.

2) En el problema 690 se calcula $AU = \frac{bc}{s}$ y en el 702 se demuestra que el incentro I de ABC es el punto medio del segmento formado por los puntos de contacto con los lados U, S.



De $AU = \frac{bc}{s} = AS$ se obtienen $UB = \frac{c(s-b)}{s}$ y $SE = \frac{b(s-c)}{s}$; en particular, para $a = b = \frac{\sqrt{5}}{2}c$, $AU = \frac{bc}{s} = \frac{2ac}{2a+c} = \frac{a}{\varphi}$; $UB = \frac{c(s-b)}{s} = \frac{c^2}{2a+c} = \frac{c}{2\varphi}$; $SE = \frac{a(2a-c)}{2a+c}$ y con ello $\frac{AS}{SE} = \frac{AE}{AS} = \frac{2c}{2a-c} = \varphi$ como es fácil de comprobar y cuyo cálculo se pide en el punto (4).

De la potencia del punto U respecto de la circunscrita $AU \cdot UB = TU \cdot UE' \Rightarrow \boldsymbol{TU = \frac{2AU \cdot UB}{2UE'}}$.

De la potencia del punto N resulta $NE' = \frac{c}{4}$; en $\Delta E'UN$, es sen $\theta = \text{sen} \sphericalangle BUT = \frac{NE'}{UE'} = \frac{c/4}{UE'}$.

En el triángulo ΔTUB, sen $\sphericalangle UTB = \text{sen}\,(90 - A) = \frac{c}{2a}$.

Del teorema de los senos ΔTUB se tiene: $\frac{TB}{\left(\frac{c/4}{UE'}\right)} = \frac{UB}{c/2a}$ y de ahí $\boldsymbol{TB = \frac{a \cdot UB}{2UE'}}$ y

$$\boldsymbol{\frac{TU}{TB} = \frac{2AU}{a} = \frac{2c}{s}} \quad (\mathbf{1}).$$

Considerando ahora que el cuadrilátero $ABTE$ es cíclico se tiene

$$a \cdot TA = a \cdot TB + c \cdot TE \Rightarrow a(TA - TB) = c \cdot TE$$

$$TE = \frac{a}{c}(TA - TB)$$

El teorema de la bisectriz en el triángulo ATB nos da

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AU}{UB} = \frac{2a}{c} \Rightarrow \boldsymbol{TA = \frac{2a}{c} \cdot TB} \Rightarrow \boldsymbol{TE = \frac{a(2a-c)}{c^2} \cdot TB = \frac{2a}{s} \cdot TB} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{TE}{TB} = \frac{2a}{s}} \quad (\mathbf{2})$$

Dividiendo por TB^2 tenemos que probar que

$$\left(\frac{TU}{TB}\right)^2 = \left(\frac{TE}{TB}\right)^2 + 1 - \frac{TE}{TB}$$

Usando (1) y (2) tenemos que comprobar que se verifica $0 = \frac{4a^2}{s^2} + 1 - \frac{2a}{s} - \frac{4c^2}{s^2}$.

$$\frac{4(a^2-c^2)}{s^2}-\frac{2a}{s}+1=\frac{c^2}{s^2}-\frac{2a}{s}+1=\frac{c^2-s(2a-s)}{s^2}=\frac{c^2-s(s-c)}{s^2}=0$$

sin más que tener en cuenta que $4s(s-c)=(2a+c)(2a-c)=4a^2-c^2=4c^2$, con lo que se concluye esta parte.

3) Tenemos de los cálculos anteriores

$$\frac{1}{TA}+\frac{1}{TB}=\frac{\frac{c+2a}{2a}}{TB}=\frac{s}{a\cdot TB}=\frac{2}{TE}$$

Y con esto queda probado el punto tercero.

La media de $\frac{1}{TA}$ y $\frac{1}{TB}$ es $\frac{c+2a}{4a\cdot TB}=\frac{2}{TE}$, o sea, TE es la media armónica de TA y TB.

4) De cálculos anteriores en el apartado 2) tenemos $TA=\frac{2a}{c}\cdot TB=\frac{2a}{c}\cdot\frac{s}{2a}TE$, de donde se sigue $\frac{TA}{TE}=\frac{s}{c}=\varphi$.

En ese mismo apartado quedó ya establecido que $\frac{AS}{SE}=\frac{AE}{AS}=\frac{2c}{2a-c}=\varphi$.■