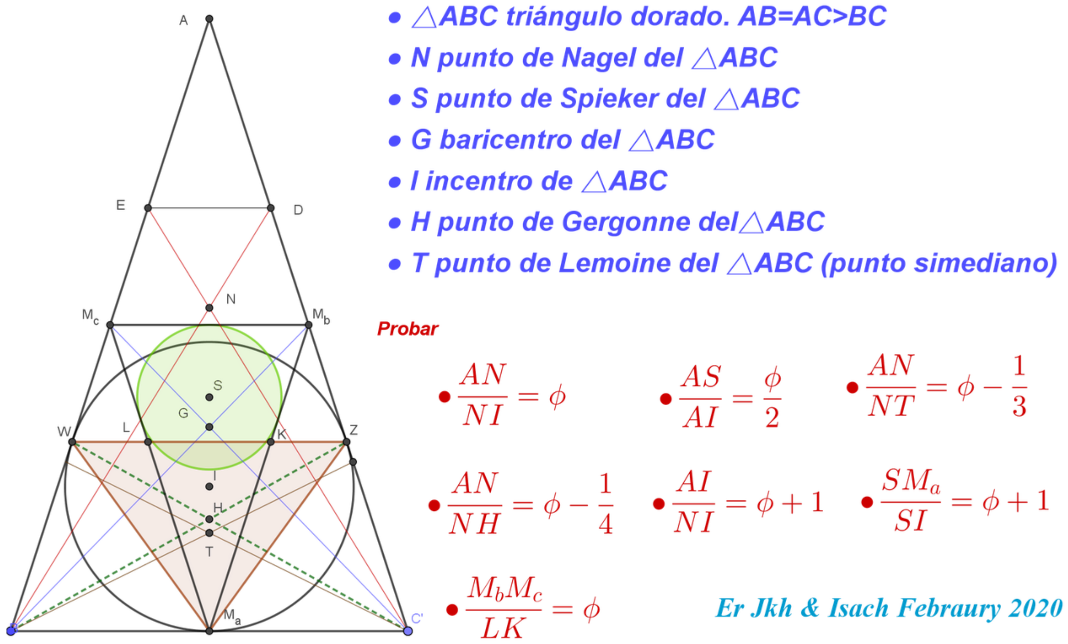
Propuesto por Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado) ..

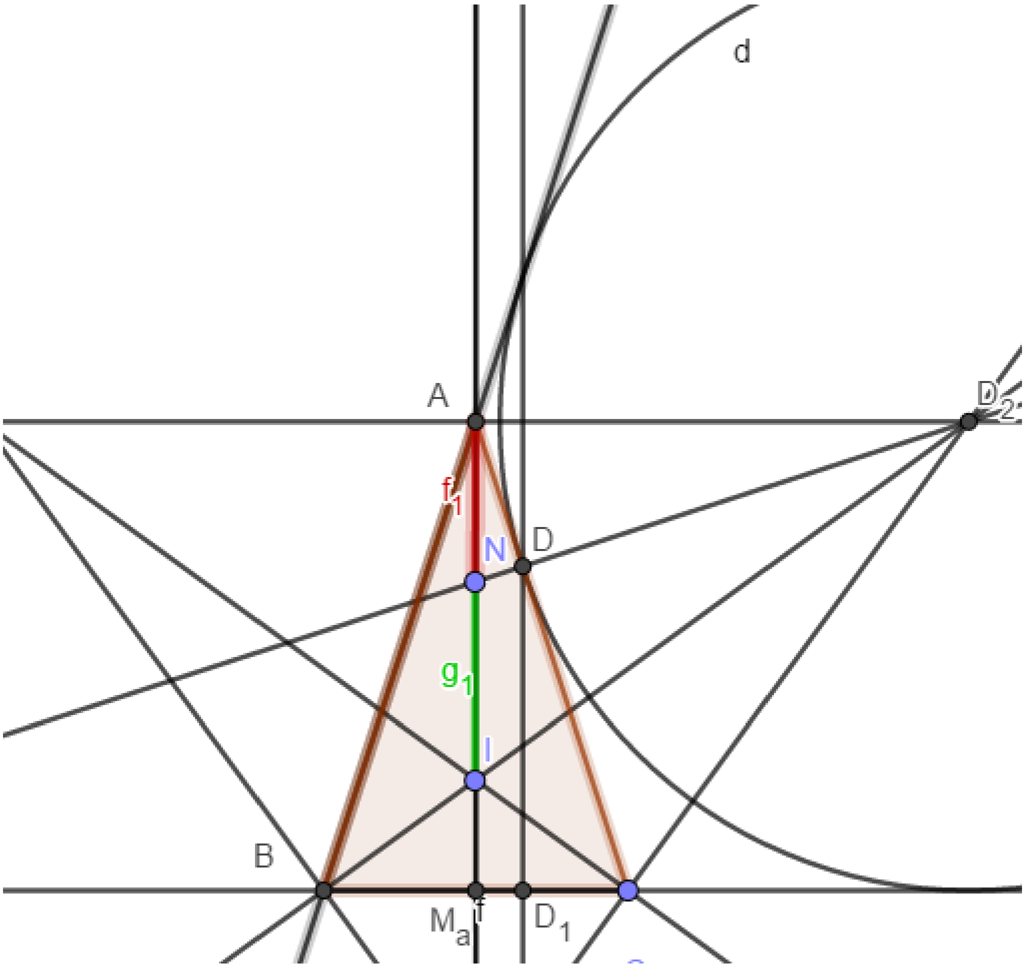
Problema 940




Isach, J. J. (2020): Comunicación personal.

Solución del director

1) La construcción de ABC siendo BC=1, es AB=AC=$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$




Así, construiremos los segmentos que se estudian en el problema.

Par ello, primero veamos el valor de la altura del vértice A.

$$h = AM_a = \sqrt{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}$$

Este valor lo tomaremos a partir de ahora como h, sí más.

El punto D es el punto de tangencia de la exinscrita al vértice B, con AD=$\frac{1}{2}$, CD=$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$D_1$ es el pie de D en BC. Es $\frac{CD}{CA} = \frac{DD_1}{AM_a} \rightarrow DD_1 = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} h = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} h$

$$\frac{D_1C}{D_1D} = \frac{M_aC}{AM_a} \rightarrow D_1C = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}h}{h} = \frac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}$$

Tenemos:

$$\frac{N\,M_a}{DD_1} = \frac{BM_a}{BD_1} \rightarrow NM_a = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}h}{1-\frac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}(2+2\sqrt{5})}{2(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}h = \frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h$$

Luego es $AN = h - NM_a = \frac{2}{2+\sqrt{5}}h$

Estudiemos AI.

El inradio es $IM_a\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = h1 \rightarrow IM_{a=}\frac{1}{2+\sqrt{5}}h$

Luego AI=h-$AI = h - IM_{a=}\frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h \rightarrow NI = AI - AN = \frac{\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}}h$

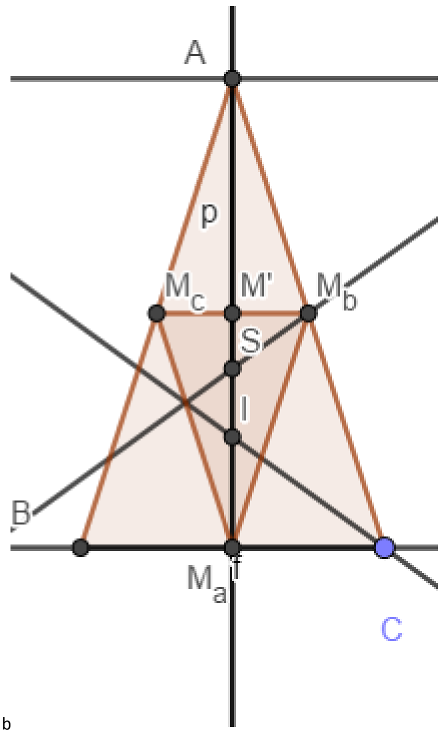
Así la primera expresión es :

$$\frac{AN}{NI} = \frac{\frac{2}{2+\sqrt{5}}h}{\frac{\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}}h} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

2) S es el punto de Spieker, es el incentro del triángulo medial.
3)

Sea M’ el punto medio de $M_b$ $M_c$. SM’ es el inradio que tiene de valor la mitad del inradio de ABC, por ser ambos triángulos semejantes de razón ½ .

SM’= $\frac{1}{2(2+\sqrt{5})}h.$




AM’ es la altura del triángulo $AM_cM_b$, que mide h/2 por ser semejantes de razón ½

Así, AS= AM’+ M’S= $\frac{h}{2} + \frac{1}{2(2+\sqrt{5})}h = \frac{3+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}h.$

Así, es $\frac{AS}{AI}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}h}{\frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h}=\frac{3+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(2-2\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{5})(2-2\sqrt{5})}=\frac{-4-4\sqrt{5}}{-16}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\phi}{2}$

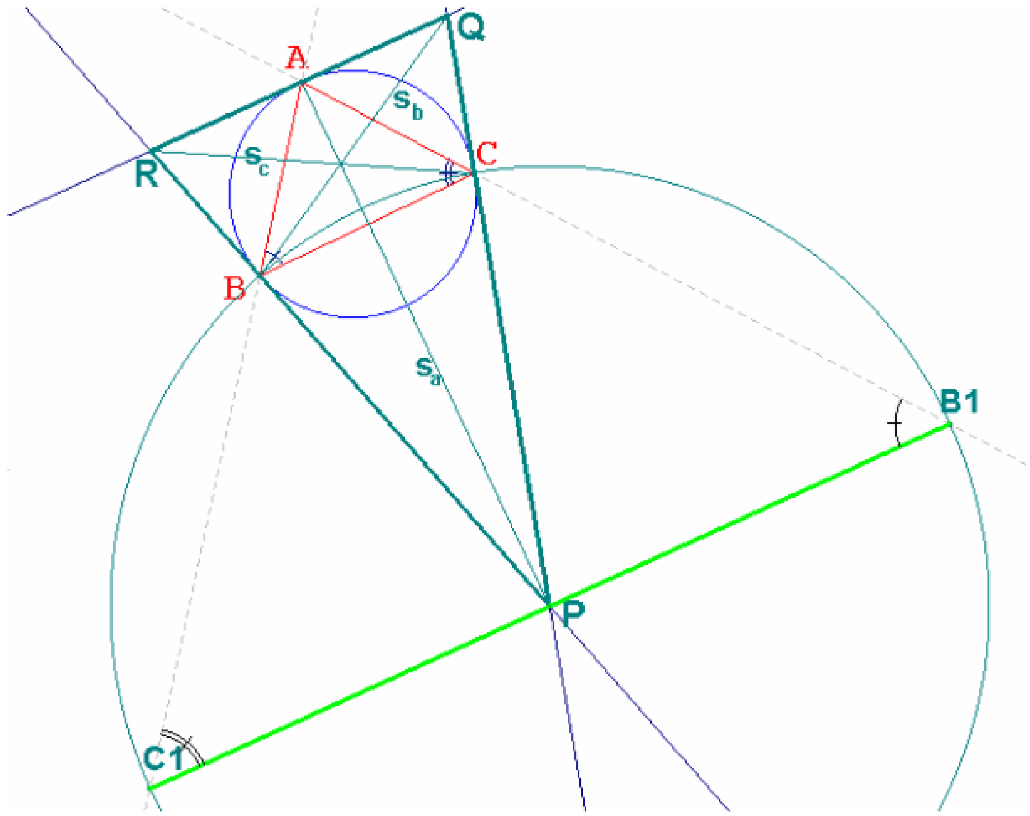
3) El punto simediano de un triángulo ABC puede ser construido de la manera siguiente: sean las líneas tangentes de la circunferencia circunscrita de ABC a través de B y C que se cortan en A', y análogamente, se definen B' y C'; entonces A'B'C' es el triángulo tangencial de ABC, y las líneas AA', BB' y CC' se cruzan en el punto simediano de ABC.[5] Se puede demostrar que estas tres líneas se cortan en un punto utilizando el teorema de Brianchon. La línea AA' es una simediana, lo que puede verse al dibujar el círculo con centro en A' que pasa a través de B y C.

https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_de_Lemoine https://personal.us.es/rbarroso/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol207dam.pdf

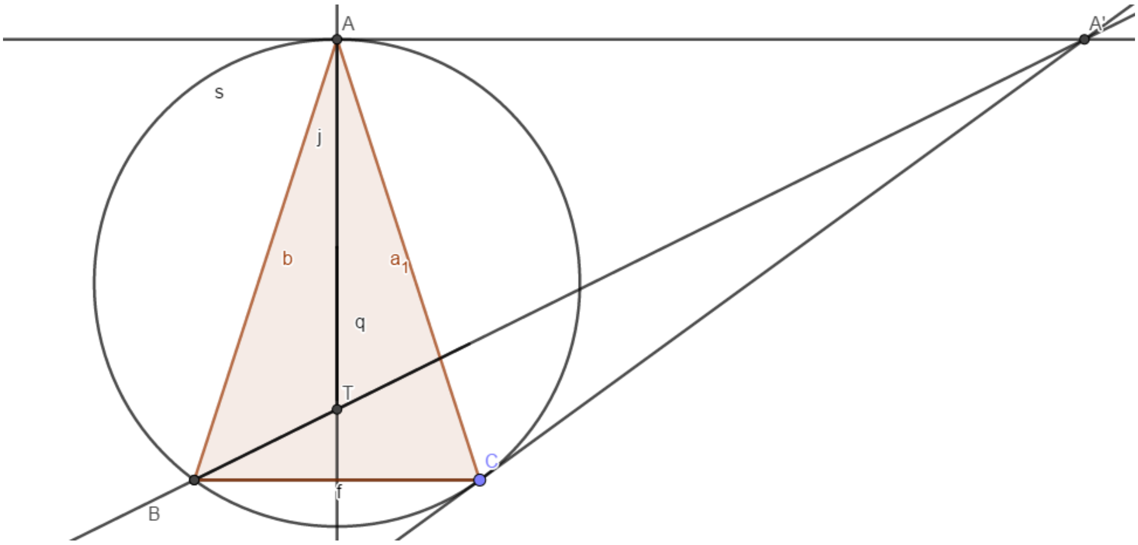
**<u>CONSTRUCCIÓN DE LAS SIMEDIANAS.</u>**

**Basándonos en el anterior punto, podemos señalar cómo construir las simedianas relacionándolas con las tangentes de la circunferencia circunscrita trazadas por los vértices del triángulo dado.**

**En efecto, si determinamos las tangentes por los vértices B y C, ambas rectas se cortarán en P, punto que se encuentra en la mediatriz del lado BC. Si trazamos la circunferencia de centro el punto P y como radio PB =PC, determinarán sobre la prolongación de los lados AB y AC dos puntos $B_1$ y $C_1$, equidistantes de P y que forman una antiparalela al lado BC. Como P es el punto medio de este segmento, uniendo A con P obtenemos la simediana $s_a$. De forma análoga obtendríamos las simedianas $s_b$ y $s_c$. (Véase la figura al respecto.)**



A partir de ahí, tenemos que




AA'C es tal que $\angle CAA' = 90 - \frac{\angle BAC}{2} = 72º = \angle A'CA$, luego ABC~A'AC

Así $\frac{AB}{BC} = \frac{A\prime A}{AC} \rightarrow AA' = \frac{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\frac{(1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$

Así al ser $BTM_a$~A'TA, es $\frac{AT}{TM_a} = \frac{AA\prime}{BM_a} \rightarrow \frac{AT}{h-AT} = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}{\frac{1}{2}} \rightarrow AT = \frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}h$

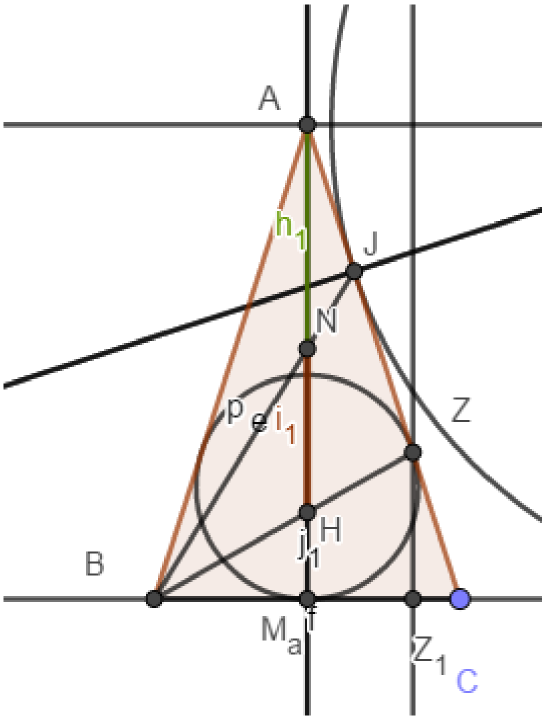
Teníamos que AN=$\frac{2}{2+\sqrt{5}}h$

Luego NT= $\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}h - \frac{2}{2+\sqrt{5}}h = \frac{3+3\sqrt{5}}{13+6\sqrt{5}}h$

Por ello,

$$\frac{AN}{NT} = \frac{\frac{2}{2+\sqrt{5}}h}{\frac{3+3\sqrt{5}}{13+6\sqrt{5}}h} = \frac{2}{3}\frac{13+6\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\frac{91-39\sqrt{5}+42\sqrt{5}-90}{49-45} = \frac{2}{3}\frac{1+3\sqrt{5}}{4} = \frac{1+3\sqrt{5}}{6}$$
$$= \phi - \frac{1}{3}$$

4)En 1) Obtuvimos $AN = \frac{2}{2+\sqrt{5}}h$




Estudiemos AH. Es $CZ = \frac{1}{2}$. Si $Z_1$ es el pie de Z en BC, tenemos que

$$\frac{CZ}{ZZ_1} = \frac{CA}{M_aA} \to ZZ_1 = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}h, \frac{CZ_1}{CZ} = \frac{CM_a}{CA} \to CZ_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2(1+\sqrt{5})}$$

$$Así, BZ_1 = 1 - \frac{1}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{1+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5}}$$

$$Por\ todo\ ello, tenemos: \frac{HM_a}{BM_a} = \frac{ZZ_1}{BZ_1} \to HM_a = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sqrt{5}}h}{\frac{1+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5}}} = \frac{1}{1+2\sqrt{5}}h$$

Luego AH $=AM_a - HM_a = h - \frac{1}{1+2\sqrt{5}}h = \frac{2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}h$

Y también que NH=AH-AN= $\frac{2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}h - \frac{2}{2+\sqrt{5}}h = \frac{4\sqrt{5}+10-2-4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+4\sqrt{5}+10}h = \frac{8}{12+5\sqrt{5}}h$

Por todo ello, tenemos:

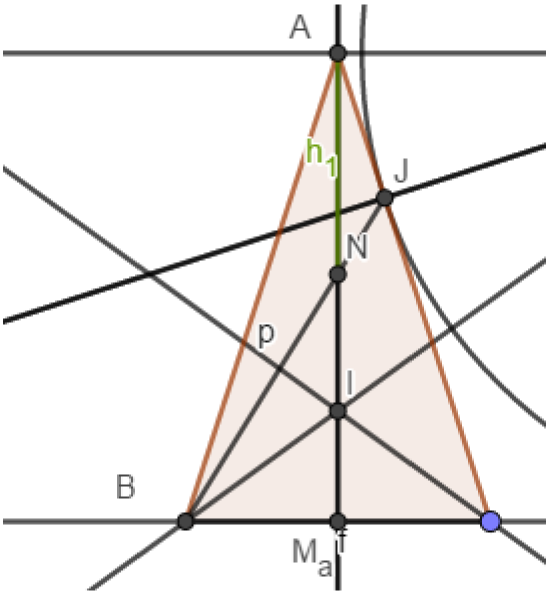
$$\frac{AN}{NH} = \frac{\frac{2}{2+\sqrt{5}}h}{\frac{8}{12+5\sqrt{5}}h} = \frac{12+5\sqrt{5}}{8+4\sqrt{5}} = \frac{96-48\sqrt{5}+40\sqrt{5}-100}{64-80} = \frac{-4-8\sqrt{5}}{-16} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \phi - \frac{1}{4}$$

5) Tuvimos en 1) $AI = \frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h$ , $AN = \frac{2}{2+\sqrt{5}}h$

Luego $NI = AI - AN = \frac{\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}}h$

Asi, es $\frac{AI}{NI} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$




6) En 2) tuvimos SM'= $\frac{1}{2(2+\sqrt{5})}h$

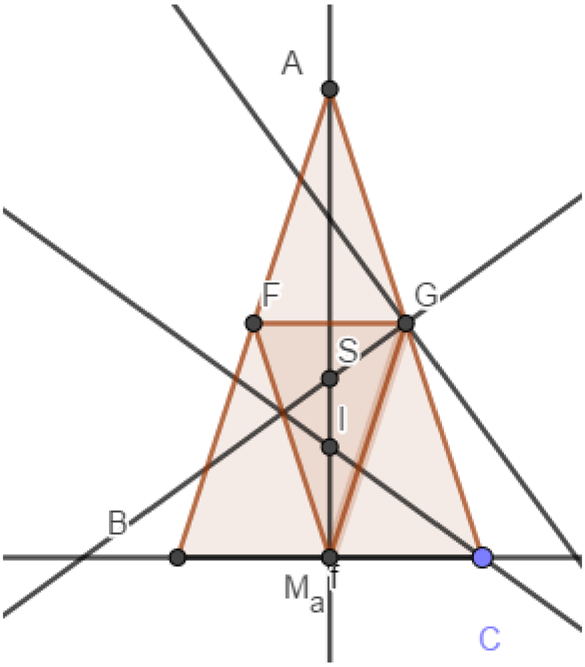
Luego SM$_a$ =$\frac{h}{2} - \frac{1}{2(2+\sqrt{5})}h = \frac{1+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}h$

En 2), AS=$\frac{3+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}h$, y en 1), $AI = \frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h$

De donde $SI = \frac{1+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}h - \frac{3+\sqrt{5}}{2(2+\sqrt{5})}h = \frac{\sqrt{5}-1}{2(2+\sqrt{5})}h$

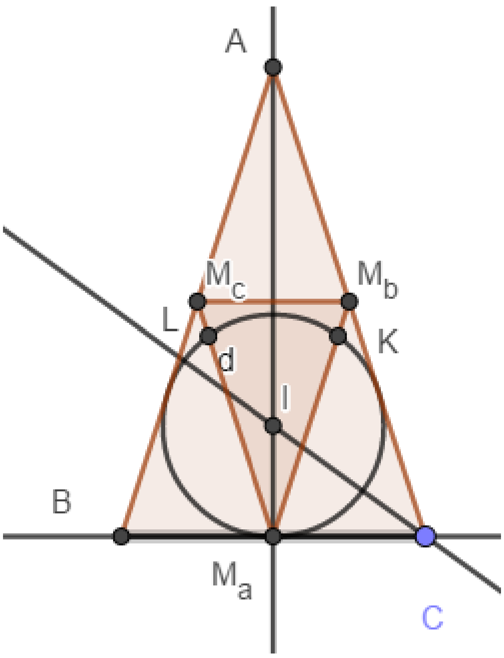
Y, por ello,

$$\frac{SM_a}{SI} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{5-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} = \phi + 1$$




7) $M_cM_b = \frac{1}{2}$

CZ=BW=$M_a$L=$M_aK = \frac{1}{2}$,




Al ser el ttiángulo $M_a$LK semejante al ABC, tenemos:

$$\frac{LK}{BC} = \frac{M_aL}{CA} \rightarrow LK = \frac{\frac{1}{2}\ 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

De donde se tiene lo pedido: $\frac{M_b M_c}{LK} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla. España.