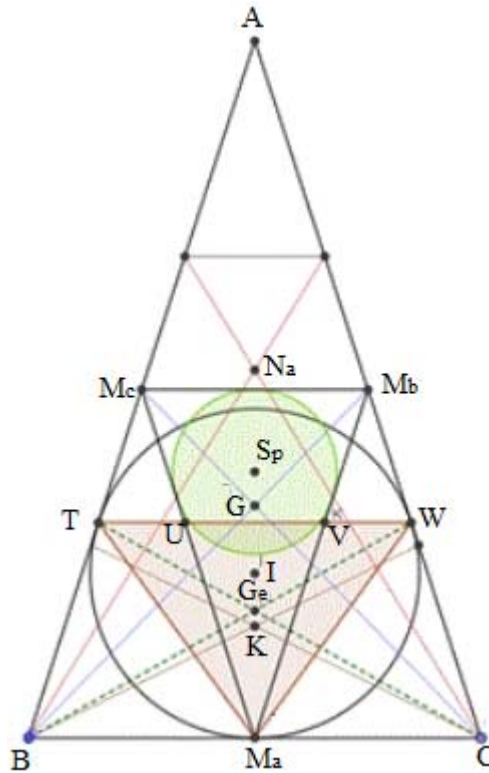


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 940. (propuesto por Juan-José Isach Mayo) Dado un triángulo dorado ABC , con $AB = AC > BC$, se consideran su punto de Nagel N_a , su punto de Spieker S_p , su baricentro G , su incentro I , su punto de Gergonne G_e , su punto simedianal K , los puntos medios M_a , M_b y M_c de los segmentos BC , CA y AB , respectivamente, los puntos de contacto T y W de su incírculo con los lados AB y AC , respectivamente, y los puntos U y V de intersección entre la recta TW y las rectas M_aM_c y M_aM_b , respectivamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$\textcircled{1} \quad \frac{AN_a}{N_a I} = \phi$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{AS_p}{AI} = \frac{\phi}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{AN_a}{N_a K} = \phi - \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{AN_a}{N_a G_e} = \phi - \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{AI}{N_g I} = \phi + 1$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{S_p M_a}{S_p I} = \phi + 1$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{M_b M_c}{UV} = \phi$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que $BC = 1$, por lo que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = c = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = \frac{2\phi^2 - 1}{2} \\ S_B = S_C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$\begin{cases} N_a = X_8 = (2\phi - 1 : 1 : 1) \\ S_p = X_{10} = (2\phi : \phi + 1 : \phi + 1) \\ G_e = X_7 = (1 : 2\phi - 1 : 2\phi - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} M_a = (0 : 1 : 1) \\ M_b = (1 : 0 : 1) \\ M_c = (0 : 1 : 1) \end{cases} \quad \begin{cases} T = (1 : 0 : 2\phi - 1) \\ W = (1 : 2\phi - 1 : 0) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} M_a M_b \equiv 0 = x + y - z \\ M_a M_c \equiv 0 = x - y + z \end{cases} \quad TW \equiv 0 = (2\phi - 1)x - y - z$$

por lo que:

$$\begin{cases} U = (1 : \phi : \phi - 1) \\ V = (1 : \phi - 1 : \phi) \end{cases}$$

Finalmente, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} AN_a^2 = \frac{2\phi - 1}{2\phi + 1} \\ N_a I^2 = \frac{(2\phi - 1)(\phi - 1)^2}{2\phi + 1} \\ AS_p^2 = \frac{(2\phi - 1)(\phi + 1)^2}{4(2\phi + 1)} \\ AI^2 = \frac{(2\phi - 1)\phi^2}{2\phi + 1} \\ N_a K^2 = \frac{(2\phi - 1)(\phi - 1)^2(2\phi^2 + \phi + 1)}{(2\phi + 1)(2\phi^2 + 1)^2} \\ N_a G_e^2 = \frac{16\phi^2(2\phi - 1)(\phi - 1)^2}{(2\phi + 1)(4\phi - 1)^2} \\ S_p K^2 = \frac{(2\phi - 1)(\phi - 1)^2(2\phi^2 + \phi + 1)}{4(2\phi + 1)(2\phi^2 + 1)^2} \\ S_p M_a^2 = \frac{(2\phi - 1)\phi^2}{4(2\phi + 1)} \\ S_p I^2 = \frac{(2\phi - 1)(\phi - 1)^2}{4(2\phi + 1)} \\ M_b M_c^2 = \frac{1}{4} \\ UV^2 = \frac{1}{4\phi^2} \end{array} \right.$$

TRIÁNGULOS CABRI

entonces:

$$\textcircled{1} \quad \frac{AN_a}{N_a I} = \sqrt{\frac{1}{(\phi-1)^2}} = \frac{1}{\phi-1} = \phi$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{AS_p}{AI} = \sqrt{\frac{(\phi+1)^2}{4\phi^2}} = \frac{\phi+1}{2\phi} = \frac{\phi}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{AN_a}{N_a K} = \sqrt{\frac{(2\phi^2+1)^2}{(\phi-1)^2(2\phi^2+\phi+1)^2}} = \frac{2\phi^2+1}{(\phi-1)(2\phi^2+\phi+1)} = \phi - \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{AN_a}{N_a G_e} = \sqrt{\frac{(4\phi-1)^2}{16\phi^2(\phi-1)^2}} = \frac{4\phi-1}{4\phi(\phi-1)} = \phi - \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{AI}{N_a I} = \sqrt{\frac{\phi^2}{(\phi-1)^2}} = \frac{\phi}{\phi-1} = \phi + 1$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{S_p M_a}{S_p I} = \sqrt{\frac{\phi^2}{(\phi-1)^2}} = \frac{\phi}{\phi-1} = \phi + 1$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{M_b M_c}{UV} = \sqrt{\phi^2} = \phi$$