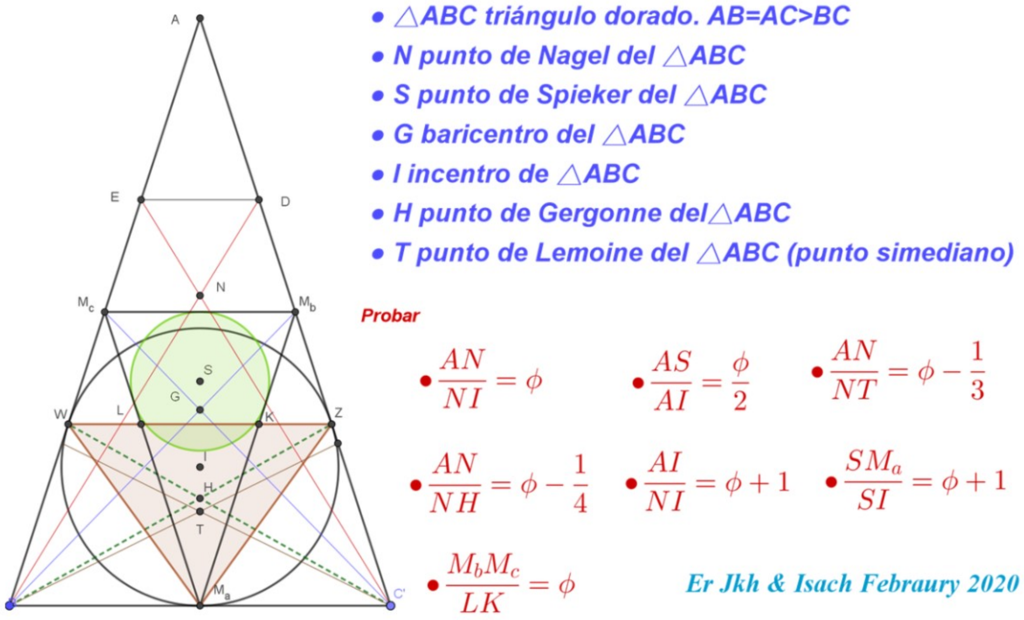
Del 16 de Marzo al 30 de abril de 2020

Propuesto por Juan José Isach Mayo, profesor de Matemáticas (jubilado).

***Problema* 940**.-



Isach, J.J. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Tomamos para ΔABC el lado $a = BC = 1$ y $AB = AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$; a partir de esto se tiene $s - b = \frac{1}{2}; s - a = \phi - \frac{1}{2}$ y $s = \phi + \frac{1}{2}$.

Si $M = (1 - 2m, m, m)$ es un punto de la bisectriz de A (de longitud h) y $G = \frac{1}{3}(1,1,1)$ es el baricentro, tenemos $AG = \frac{1}{3}(-2,1,1)$ de longitud $\frac{2}{3}h$, por tanto $|(-2,1,1)| = 2h$ es y de ello el módulo del vector $AM = m(-2,1,1)$ es $|AM| = 2h \cdot m$.

Si P y Q son otros dos puntos de la bisectriz, la longitud de PQ es la diferencia de las longitudes de AP y AQ, esto es, $|PQ| = |AQ| - |AP| = (q - p) \cdot 2h$.

Con esto tenemos ($b = c$):

$N = (s - a: s - b: s - b) \Rightarrow AN = \frac{s-b}{s} \cdot 2h;$

$S = (b + c: c + a: a + b) = (2b: a + b, a + b) \Rightarrow AS = \frac{a+b}{4s} \cdot 2h.$

$$I = (a: b: c) \Rightarrow AI = \frac{b}{2s} \cdot 2h; T = (a^2: b^2: c^2) \Rightarrow AT = \frac{b^2}{2b^2 + a^2} \cdot 2h$$

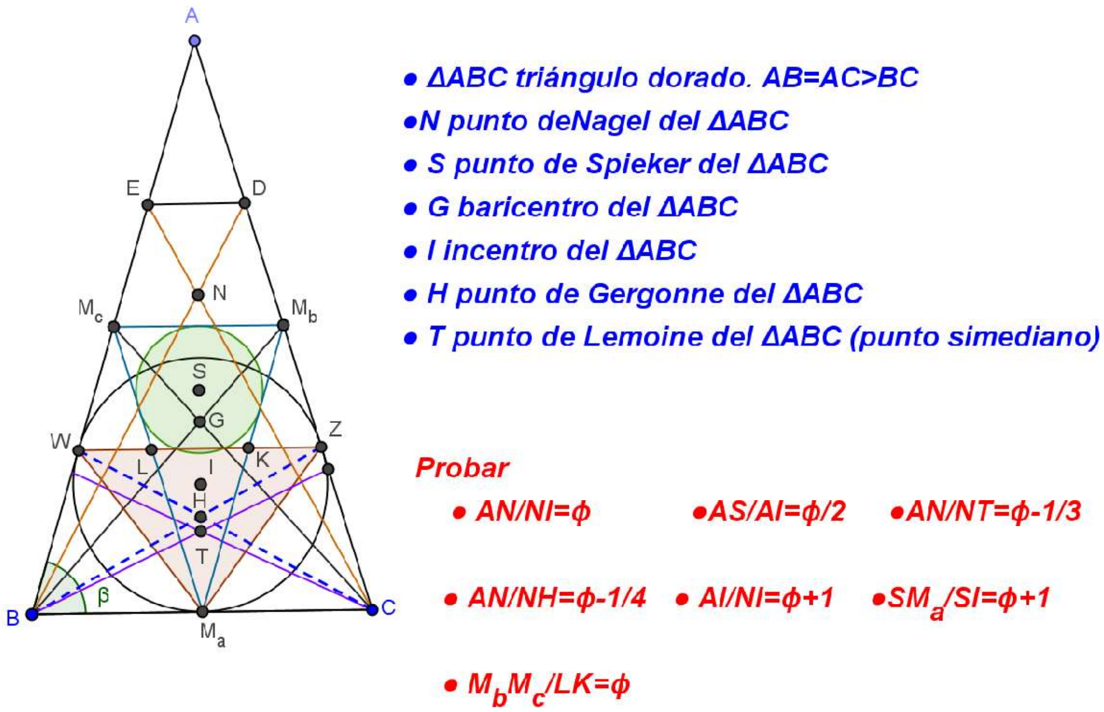
$$H = \left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-b}\right) = \left(\frac{2}{2\phi - 1} : 2 : 2\right) = (1: 2\phi - 1: 2\phi - 1) \Rightarrow AH = \frac{2\phi - 1}{4\phi - 1} \cdot 2h$$

A partir de aquí

- $NI = \left(\frac{b}{2s} - \frac{s-b}{s}\right) \cdot 2h = \frac{b-a}{2s} \cdot 2h \Rightarrow \boldsymbol{\frac{AN}{NI} = \frac{2(s-b)}{b-a} = \frac{1}{\phi-1} = \phi}$

- $\boldsymbol{\frac{AS}{AI} = \frac{a+b}{2b} = \frac{1+\phi}{2\phi} = \frac{\phi^2}{2\phi} = \frac{\phi}{2}}$
- $\frac{NT}{AN} = \frac{AT}{AN} - 1;\ \frac{AT}{AN} = \frac{b^2}{2b^2+a^2} \cdot \frac{s}{s-b} = \frac{\phi^2(2\phi+1)}{2\phi^2+1} = \frac{(\phi+1)(2\phi+1)}{2\phi+3} = 1 + \frac{3\phi}{2\phi+3} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\frac{AN}{NT} = \frac{2\phi+3}{3\phi} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\phi} = \frac{2}{3} + \phi - 1 = \phi - \frac{1}{3}}$$



- $\frac{NH}{AN} = \frac{AH}{AN} - 1;\ \frac{AH}{AN} = \frac{2\phi-1}{4\phi-1} \cdot \frac{s}{s-b} = \frac{(2\phi-1)(2\phi+1)}{4\phi-1} = \frac{4\phi^2-1}{4\phi-1} = \frac{4\phi+3}{4\phi-1} = 1 + \frac{4}{4\phi-1} \Rightarrow$

$\frac{NH}{AN} = \frac{4}{4\phi-1}$ y por último $\boldsymbol{\frac{AN}{AH} = \phi - \frac{1}{4}}$

- $\frac{NI}{AI} = \frac{AI-A}{AI} = 1 - \frac{AN}{AI} = 1 - \frac{s-b}{b/2} = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{AI}{NI} = \phi^2 = \phi + 1}$

- $SM_a = AM_a - AS = \left(1 - \frac{a+b}{4s}\right) \cdot 2h = \frac{b}{4s} \cdot 2h$

$$SI = AI - AS = \left(\frac{b}{2s} - \frac{a+b}{4s}\right) \cdot 2h = \frac{b-a}{4s} \cdot 2h$$

$$\boldsymbol{\frac{SM_a}{SI} = \frac{b}{b-a} = \frac{\phi}{\phi-1} = \phi + 1}$$

- Vamos a probar que $LK = \frac{1}{2\phi}$ y como $M_bM_c = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ concluiremos.

Por semejanza de los triángulos M_cWL y M_cBM_a por una parte y de AWZ y ABC por otra se tienen estas dos relaciones:

$$\frac{M_cW}{M_cB} = \frac{(b-a)/2}{b/2} = \frac{WL}{BM_a} \Rightarrow WL = \frac{b-a}{b} \cdot \frac{a}{2} = KZ$$

$$\frac{WZ}{a} = \frac{AW}{b} = \frac{AZ}{AC} = \frac{b-a/2}{b} \Rightarrow WZ = \frac{a(2b-a)}{2b}$$

Se ha tenido en cuenta que $AW = s - a = b - \frac{a}{2}$; $AM_c = \frac{b}{2}$ y por tanto $WB = \frac{a}{2}$.

$$LK = WZ - 2WL = \frac{a(2b-a)}{2b} - \frac{2a(b-a)}{2b} = \frac{a^2}{2b}$$

$$\boldsymbol{\frac{M_bM_c}{LK} = \frac{a/2}{a^2/2b} = \frac{b}{a} = \phi}$$

■