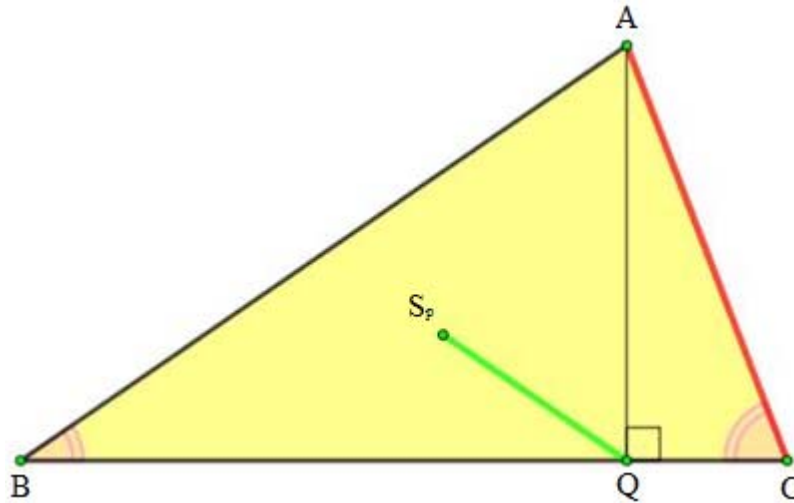


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 941. (Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz), a partir de un problema de ErcoleSuppa publicado en Perú Geométrico)

- ① Dado un triángulo ABC , se consideran su punto de Spieker S_p y el pie Q de la altura correspondiente al vértice A sobre la recta BC , tal como se muestra en la siguiente figura:

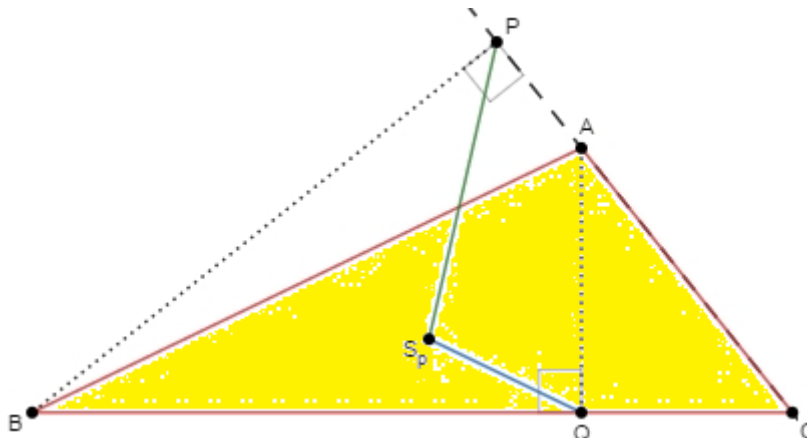


Probar que:

$$AC = 2QS_p \Leftrightarrow \angle ACB = 2\angle CBA$$

(propuesto por Ercole Suppa)

- ② Dado un triángulo ABC , se consideran su punto de Spieker S_p y los pies Q y P de las alturas correspondientes a los vértices A y B sobre las rectas BC y AC , respectivamente, tal como se muestra en la siguiente figura:



Probar que:

$$\begin{cases} AC = 2QS_p \\ AB = 2PS_p \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Solución:

- ① Llamando D al pie de la bisectriz interior correspondiente al vértice C del triángulo ABC y considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como:

$$\begin{cases} D = (a : b : 0) \\ M = (0 : 1 : 1) \Rightarrow E = (0 : 3a^2 + b^2 - c^2 : a^2 - b^2 + c^2) \end{cases}$$

resulta que:

❶ Como:

$$\begin{cases} BD^2 = \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2} \\ CD^2 = \frac{ab(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2} \end{cases}$$

entonces:

$$\triangle ACB = 2 \triangle CBA \Leftrightarrow BD = CD \Leftrightarrow 0 = CD^2 - BD^2 = \frac{a(ab+b^2-c^2)}{a+b} \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0$$

❷ Como:

$$\begin{cases} Q = (0 : a^2 + b^2 - c^2 : a^2 - b^2 + c^2) \\ S_p = (b+c : a+c : a+b) \end{cases}$$

entonces:

$$QS_p^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2 + a(b^3 + c^3 - abc)}{4a(a+b+c)}$$

por lo que:

$$AC = 2QS_p \Leftrightarrow 0 = AC^2 - 4QS_p^2 = b^2 - \frac{(b^2 - c^2)^2 + a(b^3 + c^3 - abc)}{a(a+b+c)} = \frac{(a-b+c)(b+c)(ab+b^2-c^2)}{a(a+b+c)}$$

luego:

$$AC = 2QS_p \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0$$

Por tanto:

$$AC = 2QS_p \Leftrightarrow ab+b^2-c^2=0 \Leftrightarrow \triangle ACB = 2 \triangle CBA$$

- ② Utilizando el resultado probado en el apartado anterior, resulta que:

$$\begin{cases} AC = 2QS_p \\ AB = 2PS_p \end{cases} \Leftrightarrow^* \begin{cases} \triangle ACB = 2 \triangle CBA \\ \triangle BAC = 2 \triangle ACB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle CBA = \frac{\pi}{7} \\ \triangle ACB = \frac{2\pi}{7} \\ \triangle BAC = \frac{4\pi}{7} \end{cases} \Leftrightarrow ABC \text{ es un triángulo heptagonal}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega